# 1.-Sobre la deducción de la relación masa-energía

## 1.1 Introducción

**1.1.1** Como es bien sabido, $E = mc^2$ es la fórmula científica más popular de todas las encontradas por el hombre. Y no sólo popular, sus consecuencias científicas y humanas han sido enormes desde su descubrimiento. Un descubrimiento que es universalmente atribuido a Albert Einstein. No son tan populares, sin embargo, las discusiones académicas sobre la autoría verdadera del descubrimiento.

**1.1.2** Puesto que aquí no estamos interesados en ese tipo de discusiones, nos limitaremos a enumerar algunos de los hechos menos controvertidos relacionados con la autoría del descubrimiento de la relación masa-energía:

1. En el penúltimo 'Query' de su Opticks (Query 30) [6], Newton se preguntaba: ¿no son los cuerpos materiales y la luz convertibles entre sí y no reciben los cuerpos gran parte de su actividad de las partículas de luz que entran en su composición? El cambio de luz en cuerpos y de los cuerpos en luz es conforme con el curso de la naturaleza.

2. El concepto de masa electromagnética fue desarrollado a lo

largo del siglo XIX por autores como J. J. Thomson, o Heaviside, o H. Lorentz. Mediante ese concepto intentaban comprender la forma en la que el campo electromagnético contribuye a la masa de las partículas cargadas.

3. En 1900 H. Poincaré publicó un artículo [8] en el que derivaba la expresión $M = S/c^2$, donde $M$ era el impulso de la radiación electromagnética, $S$ el flujo de la radiación y $c$ la velocidad de la luz.

4. En un nuevo artículo [9], esta vez publicado en 1904, H. Poincaré formuló su Principio de Relatividad: No es posible por la observación hecha en un cuerpo detectar su movimiento uniforme o de traslación. Este principio, junto con la relación anterior $M = S/c^2$ conduce a $\Delta m = E/c^2$.

5. En 1904 y 1905, justo antes de la publicación del artículo de Einstein sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento [2], y en la misma revista Annalen der Phyisik, Friedrich Hasenhörl publicó dos artículos sobre la teoría de la radiación en los cuerpos en movimiento [3], [4] haciendo la primera declaración explícita de que la energía calorífica de un cuerpo incrementa su masa.

6. En noviembre de 1905, Einstein publicó un breve artículo [1] en el que dedujo su famosa relación masa-energía, haciendo uso de un resultado demostrado en su trabajo anterior sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento. En ese trabajo no hizo ninguna referencia a las obras anteriores sobre esta cuestión.

7. M. Planck publicó un artículo en 1907 [7] en el que logró derivar, usando la noción de Poincaré sobre el momento de la radiación, la misma relación masa-energía que Einstein. En ese trabajo, Planck reconocía la prioridad del trabajo de Einstein, aunque destacando que su derivación era más general que la de Einstein.

8. En un breve artículo publicado en 1952 [5] , H. E. Ives examinó brevemente las contribuciones más destacadas a la derivación de la relación masa-energía. En el apéndice final demostró la circularidad del argumento de Einstein.

**1.1.3** En las dos secciones siguientes se reproducen tanto la derivación de Einstein de la relación masa-energía como la prueba de Ives de su circularidad.

## 1.2 Deducción de Einstein de la relación masa-energía

**1.2.1** La traducción del trabajo original de Einstein[1] incluida en esta sección se ha realizado a partir de la versión inglesa de W. Perrett y G.B. Jeffery. Por sencillez y claridad, la notación original de Einstein se ha modificado parcialmente, en particular $V$, que en el trabajo de Einstein representa la velocidad de la luz, será reemplazada po $c$; y $\gamma$ será utilizada en lugar de $1/\sqrt{(1-v^2/c^2)}$.

> Los resultados de una investigación previa publicada por mí [2] conducen a una conclusión muy interesante que

[1]Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhänging? (¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido energético?)

será deducida aqui. Basé esa investigación en las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío junto con la expresión de Maxwell para la energía electromagnética del espacio, además del principio:

> Las leyes por las cuales se alteran los estados de los sistemas físicos son independientes de a cual de los dos sistemas de referencia, que se mueven con movimiento de traslación uniforme y paralelo el uno respecto al otro, se refieran esas alteraciones (principio de relatividad)

Con esos principios[2] como base deduje el siguiente resultado (§8):

Sea un sistema de ondas planas de luz que, referidas al sistema de coordenadas $(x, y, z)$, posee la energía $\ell$; sea $\varphi$ el ángulo de la dirección del rayo (de la normal a la onda) con el eje $X$ del sistema de referencia. Si se introduce un nuevo sistema de coordenadas $(\xi, \eta\zeta)$ que se mueve en traslación paralela uniforme con respecto al sistema de referencia $(x, y, z)$, y cuyo origen de coordenadas se mueve a lo largo del eje $X$ con velocidad $v$, entonces la cantidad mencionada de luz posee en el sistema $(\xi, \eta\zeta)$ $\ell^*$ :

$$\ell^* = \gamma\ell\left(1 - \frac{v}{c}\right)\cos\varphi \tag{1}$$

donde $c$ es la velocidad de la luz. Haremos uso de este resultado en lo que sigue.

[2]El principio de la constancia de la velocidad de la luz está desde luego contenido en las ecuaciones de Maxwell

Sea un cuerpo estacionario en el sistema de referencia $(x, y, z)$, y sea $E_o$ su energía referida al sistema $(x, y, z)$. Sea $H_o$ la energía del cuerpo relativa al sistema $(\xi, \eta, \zeta)$ moviéndose como se indicó más arriba con una velocidad $v$.

Dejemos que este cuerpo envíe, en una dirección que forma un ángulo $\varphi$ con el eje $X$, ondas planas de luz de energía $L/2$ medida con relación al sistema $(x, y, z)$ y, simultáneamente, una cantidad igual de luz en la dirección opuesta. Al hacerlo, el cuerpo permanece en reposo con respecto al sistema $(x, y, z)$. El principio de la energía se cumple en este proceso y de hecho (por el principio de la relatividad) con respecto a ambos sistemas de coordenadas. Si llamamos $E_1$ y $H_1$ a la energía del cuerpo después de la emisión de luz medida respectivamente respecto a los sistemas $(x, y, z)$ y $(\xi \eta, \zeta)$, obtenemos mediante la relación anterior:

$$E_o = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right] \tag{2}$$

$$H_o = H_1 + \left[\gamma \frac{L}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right)\cos\varphi + \gamma \frac{L}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)\cos\varphi\right] \tag{3}$$

$$= H_1 + \gamma L \tag{4}$$

Por substracción obtenemos:

$$(H_o - E_o) - (H_1 - E_1) = L(\gamma - 1) \tag{5}$$

Las dos diferencias de la forma $H - E$ que aparecen en esta expresión tienen significado físicos simples. $H$ y $E$ son valores de energía del mismo cuerpo referidos a dos sistemas de coordenadas que están en movimiento relativamente uno al otro, estando el cuerpo en reposo en uno de los dos sistemas (el sistema $(x, y, z)$). Por lo tanto está claro que la diferencia $H - E$ solo puede diferir de la energía cinética $K$ del cuerpo, con respecto al otro sistema $(\xi, \eta, \zeta)$, en una constate aditiva $C$, que depende de la elección de las constantes aditivas arbitrarias de las energías $H$ y $E$. Así nos podemos escribir:

$$H_o - E_o = K_o + C \tag{6}$$

$$H_1 - E_1 = K_o + C \tag{7}$$

puesto que $C$ no cambia durante la emisión de la luz. Por tanto tenemos:

$$K_o - K_1 = L(\gamma - 1) \tag{8}$$

La energía cinética del cuerpo con respecto a $(\xi, \eta, \zeta)$ disminuye como resultado de la emisión de luz, y la cantidad disminuida es independiente de las propiedades del cuerpo. Además, la diferencia $K_o - K_1$, como en el caso de la energía cinética del electrón (§10), depende de la velocidad. Despreciando las magnitudes de cuarto orden y superiores podremos escribir:

$$K_o - K_1 = \frac{L}{c^2}\frac{v^2}{2} \tag{9}$$

De esta ecuación se sigue inmediatamente que: Si un

> cuerpo cede la energía $L$ en forma de radiación, su masa disminuye en $L/c^2$. Resulta indiferente el hecho de que la energía retirada del cuerpo sea la energía de una radiación, lo que nos lleva a la conclusión más general de que:
>
> > La masa de un cuerpo es una medida de su contenido energético; Si la energía cambia en $L$, la masa cambia en el mismo sentido en $L/(9 \times 10^{20}$, si la energía se mide en ergios y la masa en gramos.
>
> No es imposible que con cuerpos cuyo contenido energético es variable en un grado elevado (por ejemplo, con sales de radio) la teoría puede ser correctamente comprobada. Si la teoría se corresponde con los hechos, la radiación transmite inercia entre los cuerpos emisores y absorbentes.

**1.2.2** Nótese que la popular fórmula $E = mc^2$ no aparece explícitamente en el artículo de Einstein, aunque se deriva de forma inmediata de la última de sus ecuaciones:

$$K_o - K_1 = \frac{L}{c^2}\frac{v^2}{2} \tag{10}$$

En efecto, por un lado, $K_o - K_1$ es mayor que cero. Por el otro, y siendo constante la velocidad $v$ del cuerpo, su energía cinética solo puede cambiar si cambia su masa. Por último, puesto que el único suceso es la emisión de radiación electromagnética por el vuerpo, sólo esta emisión puede explicar el cambio en la masa del cuerpo.

Así, tenemos:

$$K_o - K_1 = \frac{1}{2}\Delta m v^2 \tag{11}$$

donde $\Delta m$ es la variación en la masa del cuerpo debida a la emisión de la radiación. Podremos escribir:

$$\frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}L\frac{v^2}{c^2} \tag{12}$$

Y por tanto:

$$\Delta m = L/c^2 \tag{13}$$

O bien:

$$L = \Delta m c^2 \tag{14}$$

## 1.3 Crítica de H.E. Ives

**1.3.1** Antes de desarrollar el argumento de Ives sobre la circularidad de la deducción anterior de Einstein de la relación masa energía, debemos recordar la expresión relativista de la energía cinética $K$, que es el trabajo hecho por una fuerza neta $F$ que actúa sobre una partícula, siendo, a su vez, la fuerza igual al cambio en el momento relativista $p = \gamma m v$ de la partícula:

$$K = \int_0^{v_f} F ds = \int_0^{v_f} \frac{dp}{dt} ds \tag{15}$$

$$= \int_0^{v_f} v dp = \int_0^{v_f} v d\left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \tag{16}$$

donde el último diferencial se puede resolver:

$$d\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \left(m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} + m\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\right)dv \tag{17}$$

$$= m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{v^2}{c^2}\right)dv \tag{18}$$

$$= m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv \tag{19}$$

Y entonces (16) se puede reescribir:

$$K = \int_0^{v_f} vd\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \tag{20}$$

$$= \int_0^{v_f} m\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} vdv \tag{21}$$

$$= mc^2\left(\frac{1}{1-\frac{v_f^2}{c^2}}-1\right) \tag{22}$$

que reescribiremos en la forma compacta:

$$K = mc^2(\gamma - 1) \tag{23}$$

**1.3.2** Para algunos autores como H.E. Ives, de ninguna manera está clara la siguiente afirmación de Einstein (page **??**):

> Así, está claro que la diferencia $H - E$ solo puede diferir de la energía cinética $K$ del cuerpo, con respecto al otro sistema $(\xi, \eta, \zeta)$, en una constante aditiva $C$, que depende

de la elección de las constantes aditivas arbitrarias de las energía $H$ y $E$. En consecuencia podemos poner:

$$H_o - E_o = K_o + C \tag{24}$$

$$H_1 - E_1 = K_o + C \tag{25}$$

puesto que $C$ no cambia durante la emisión de luz.

**1.3.3** Ives empieza su argumento sobre la circularidad en la deducción de Einstein de la relación masa-energía recordando la objeción de Planck a la hipótesis de Einstein:

$$H - E = K + C \tag{26}$$

donde $E$ se observa desde el sistema propio del objeto $(x, y, z)$ mientras que $H$ y $K$ se observan desde el sistema de referencia $(\xi, \eta, \zeta)$. Desarrolla entonces la objeción de Planck considerando la ecuación de Einstein (5):

$$(H_o - E_o) - (H_1 - E_1) = L(\gamma - 1) \tag{27}$$

deducida en la página 5 del artículo de Einstein. A continuación, teniendo en cuenta (22) y siendo $m_o$ y $m_1$ respectivamente las masas del cuerpo antes y después de la emisión de la radiación electromagnética,[3], escribe las correspondientes energías cinéticas $K_o$ y $K_1$:

$$K_o = m_o c^2(\gamma - 1) \tag{28}$$

$$K_1 = m_1 c^2(\gamma - 1) \tag{29}$$

[3]La notación original era $m$ ay $m'$.

Por tanto:

$$K_o - K_1 = (m_o - m_1)c^2(\gamma - 1) \tag{30}$$

$$(\gamma - 1) = \frac{K_o - K_1}{(m_o - m_1)c^2} \tag{31}$$

Reescribe ahora la ecuación (27) como:

$$(H_o - E_o) - (H_1 - E_1) = L\frac{K_o - K_1}{(m_o - m_1)c^2} \tag{32}$$

que se puede considerar también como la diferencia de las ecuaciones:

$$H_o - E_o = \frac{L}{(m_o - m_1)c^2}(K_o + C) \tag{33}$$

$$H_1 - E_1 = \frac{L}{(m_o - m_1)c^2}(K_1 + C) \tag{34}$$

porque en efecto:

$$(H_o - E_o) - (H_1 - E_1) = \frac{L}{(m_o - m_1)c^2}[(K_o + C) - (K_1 + C))] \tag{35}$$

$$= \frac{L}{(m_o - m_1)c^2}(K_o - K_1) \tag{36}$$

**1.3.4** Las ecuaciones (33)-(34) difieren de las de Einstein (6) y (7):

$$H_o - E_o = K_o + C \tag{37}$$

$$H_1 - E_1 = K_1 + C \tag{38}$$

en el factor multiplicador $L/(m_o - m_1)c^2$. Por tanto, las ecuaciones de Einstein (37) y (38) implican implícitamente que:

$$\frac{L}{(m_o - m_1)c^2} = 1 \tag{39}$$

Y por tanto que:

$$L = (m_o - m_1)c^2 \tag{40}$$

que es lo que Einstein afirma haber probado. O en otras palabras, para probar $L = (m_1 - m_0)c^2$, Einstein asumió (implícitamente) que $L = (m_1 - m_0)c^2$. Esta es la circularidad que Ives descubrió en la deducción de Einstein de la relación entre la masa y la energía.

**1.3.5** Por innecesario que pueda parecer, debemos recordar que un argumento no puede ser refutado por otro argumento independiente. Si dos argumentos independientes llevan a conclusiones contradictorias, entonces ambos argumentos están haciendo uso de un supuesto inconsistente. Dicho esto, debemos reconocer que si la expresión relativista de la energía cinética es $mc^2(\gamma - 1)$, entonces el argumento de Ives es correcto y Einstein no dedujo de forma adecuada la relación masa-energía. Si ese fuera el caso, M. Planck sería su verdadero descubridor.

# Bibliography


[1] Albert Einstein, *Ist die trägheit eines körpers von seinem energieinhalt abhängig?*, Annalen der Physik **18** (1905), 639–641.

[2] ______, *Zur elektrodynamik bewegter körper*, Annalen der Physik **17** (1905), 891–921.

[3] Friederich Hasenöhrl, *Zur theorie der strahlung in bewegten körpern*, Annalen der Physik **15, 344-370** (1904), 344–370.

[4] Friedrich Hasenöhrl, *Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern. berichtigung*, Annalen der Physik **16** (1905), 589–592.

[5] H. E. Ives, *Derivation of the mass-energy relation*, Journal of the Optical Society **42** (1952), 540–543.

[6] Isaac Newton, *Opticks*, Dover Publishing, 1952.

[7] Max Planck, *Zur Dynamik bewegter Systeme*, Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften **29** (1907), 542–570.

[8] Henri Poincaré, *The theory of Lorentz and the principle of reaction*, Archives nèerlandaises des Sciences exactes et naturelles **5** (1900), 252–278.

[9] ______, *L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique*, Bulletin des Sciences Mathématiques **28, 2 série** (1904), 302–324.