

## 1.-Relatividad en CALM

... la propia noción de un punto en el espaciotiempo es incorrecta.

Shahn Majid

### INTRODUCCIÓN

**1** La teoría especial de la relatividad suele presentarse como una teoría revolucionaria del espacio y el tiempo. La teoría, en efecto, propone que el espacio y el tiempo están íntimamente entrelazados en un continuum cuatridimensional. Sin embargo, la estructura fina del espaciotiempo sigue siendo un continuum densamente ordenado, es decir un continuum clásico: entre dos puntos cualesquiera existe una infinidad no contable de otros puntos. Es por tanto una teoría infinitista sobre el espacio y el tiempo, y por tanto una teoría cuya consistencia formal depende de la consistencia formal del infinito actual. Sorprende la escasa atención que los físicos prestan a esta cuestión fundamental.

**2** Si la hipótesis del infinito actual fuera inconsistente entonces todos los continuums imaginables serían también inconsistentes. Y si la realidad es consistente, el espacio y el tiempo debería tener una naturaleza discreta. En esas condiciones, surgen inevitablemente dos preguntas: ¿sería afectada la teoría de la relatividad por la discreción del espaciotiempo? Y en la dirección opuesta: ¿Podría servir la teoría de la relatividad para confirmar la naturaleza discreta del

2 — Relatividad en CALM

espacio y el tiempo? A título de ejemplo, la breve discusión que sigue reinterpreta la transformación de Lorentz en términos discretos. El resto del libro analiza algunas situaciones conflictivas de la relatividad especial que podrían estar probando la naturaleza discreta del espacio y el tiempo.

**3** Consideremos un CALM en el que rige el teorema discreto de Pitágoras. Supóngase que necesitamos transformar la longitud de los lados de un triángulo rectángulo en esta geometría en sus correspondientes longitudes en la geometría del continuo, y viceversa. Sea  $h$  el número de sits de la hipotenusa, y  $x$  e  $y$  el número de sits de los catetos, siendo  $x < y$ . En la geometría discreta de un CALM tendremos  $h = y$ .

**4** Si  $\sigma$  es la longitud de un sit en la geometría del continuo, en esta geometría la longitud de los catetos será  $x\sigma$  e  $y\sigma$ ; pero la longitud de la hipotenusa no puede ser  $h\sigma = y\sigma$  porque de acuerdo con el teorema clásico de Pitágoras la hipotenusa es mayor que los dos catetos.

**5** Sea entonces  $h'\sigma$  la longitud de la hipotenusa en el continuo. Podemos escribir (teorema clásico de Pitágoras):

$$(h'\sigma)^2 = (y\sigma)^2 + (x\sigma)^2 \quad (1)$$

O bien:

$$(y\sigma)^2 = (h'\sigma)^2 - (x\sigma)^2 \quad (2)$$

y entonces:

$$y = \sqrt{h'^2 - x^2} \quad (3)$$

**6** Por otra parte la razón entre la hipotenusa analógica y la digital será:

$$\frac{h'\sigma}{h\sigma} = \frac{h'}{h} \quad (4)$$

$$= \frac{h'}{y} \quad (5)$$

$$= \frac{h'}{\sqrt{h'^2 - x^2}} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/h'^2}} \tag{7}$$

Nótese que la razón  $h'/h$  tiene la forma del factor relativista  $\gamma$ .

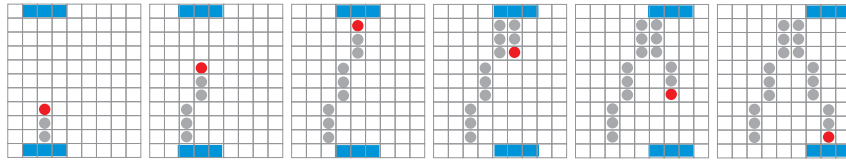


Figure 1.1: Michelson-Morley digital: un fotón moviéndose en la dirección perpendicular a  $v$  también atraviesa  $2y$  sits ( $2 \times 9$ ) en la figura).

**7** Siguiendo con el mismo ejemplo, y solo con fines ilustrativos, considérese un interferómetro del tipo Michelson-Morley moviéndose en un CALM bidimensional con un movimiento lineal uniforme de velocidad  $v$ . Si  $s$  es el número de sits de sus brazos, a lo largo del brazo paralelo a  $v$  la luz atraviesa  $(s + x)$  sits cuando se mueve en la misma dirección que el brazo y  $s - x$  cuando lo hace en la dirección contraria, siendo  $x$  el número de sits que atraviesa el brazo del aparato (en la dirección de este brazo) mientras que la luz atraviesa los  $s$  sits del brazo. Este rayo atraviesa entonces un total de  $s + x + s - x = 2s$  sits. De acuerdo con el teorema discreto de Pitágoras el rayo que se mueve en la dirección perpendicular a  $v$  también se mueve  $2s$  sits (Figura 1.1).

**8** La conclusión experimental sería la misma que en el caso continuo, pero la explicación de los resultados sería bien distinta. En efecto, mientras en el modelo continuo se necesita una contracción de longitud en la dirección del movimiento, en el caso del CALM es suficiente con el teorema discreto de Pitágoras. La contracción de FitzGerald-Lorentz se podría interpretar como una transformación entre los modelos continuo y discreto del espaciotiempo. Esa es la idea que examinaremos en la siguiente sección.

4 — Relatividad en CALM

**9** De la misma manera que la teoría de la relatividad especial es necesaria solo a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, el teorema digital Pythagoras sería necesario sólo a escalas ultramicroscópicas cercanas a la escala de Planck. A modo de ejemplo ilustrativo, tenga en cuenta que cada punto de una línea muy fina visualmente percibida por un ojo humano, estaría formada por un número supermillonario de sítos, por lo que esa línea a la escala de Planck sería una superficie cuya anchura tendría también un número supermillonario de sítos.

REINTERPRETACIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

**10** Empezaremos esta sección demostrando (en términos semi formales.<sup>1</sup>) la transformación de Lorentz para destacar el papel del factor relativista  $\gamma$  en dicha transformación.

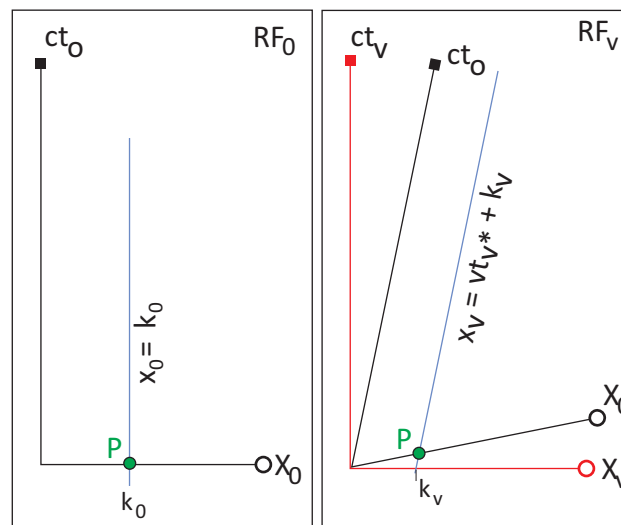


Figure 1.2: Izquierda: línea de universo de un punto estático en  $RF_0$ . Derecha: línea de universo del mismo punto visto desde  $RF - v$ .

<sup>1</sup>See [1]

**11** Sea  $P$  un punto en reposo en su sistema de referencia propio  $RF_o$ . La línea de universo de  $P$ <sup>2</sup> en  $RF_o$  es la recta de ecuación (figura 1.2, left):

$$x_o = k_o \quad (8)$$

**12** Sea  $RF_v$  un sistema de referencia inercial que se mueve con respecto  $RF_o$  en la dirección de  $X_o$ . Supóngase que desde la perspectiva de  $RF_v$  el sistema de referencia  $RF_o$  se mueve de izquierda a derecha, lo que evidentemente significa que desde el punto de vista de  $RF_o$  es el sistema  $RF_v$  el que se mueve de derecha a izquierda (véase el Capítulo ?? sobre convenciones). La línea de universo de  $P$  en  $RF_v$  será por tanto la recta de ecuación: (Figure 1.2, derecha):

$$x_v = vt_v + k_v \quad (9)$$

O bien:

$$x_v - vt_v = k_v \quad (10)$$

Dividiendo (8) por (9) se obtiene:

$$\frac{x_o}{x_v - vt_v} = \frac{k_o}{k_v} = k \quad (11)$$

De modo que:

$$x_o = k(x_v - vt_v) \quad (12)$$

**13** Haremos ahora uso del primer principio de la relatividad según el cual  $RF_o$  and  $RF_v$  son totalmente equivalentes. En consecuencia, bajo las mismas condiciones anteriores de 11 el análisis de la línea de universo de un punto en reposo en  $RF_v$  nos llevan a:

$$x_v = k(x_o + vt_o) \quad (13)$$

Las ecuaciones (12) y (13) son la nueva versión relativista de transformación clásica de Galileo para el eje  $X$  (Las ecuaciones para los

<sup>2</sup>Línea cuyos puntos representan las sucesivas posiciones de  $P$  a medida que transcurre el tiempo

6 — Relatividad en CALM

ejes  $Y$  y  $Z$  son totalmente equivalentes).

**14** Para determinar la constante  $k$  hacemos uso del segundo principio de la relatividad. En lugar de un punto en reposo, sea  $x_0 = ct_0$  la coordenada  $X_0$  de un fotón que se mueve paralelo al eje  $X_0$ . Análogamente, sea  $x_v = ct_v$  la coordenada  $X_v$  de un fotón que se mueve paralelo a  $X_v$ . De acuerdo con (12) y (13) podremos escribir:

$$ct_0 = k(ct_v - vt_v) \quad (14)$$

$$ct_v = k(ct_0 + vt_0) \quad (15)$$

Dividiendo ambos lados de (14) por  $t_v$ :

$$c \frac{t_0}{t_v} = k(c - v) \quad (16)$$

$$\frac{t_v}{t_0} = \frac{c}{k(c - v)} \quad (17)$$

Dividiendo ambos lados de (15) por  $t_0$ :

$$c \frac{t_v}{t_0} = k(c + v) \quad (18)$$

Es decir:

$$\frac{t_v}{t_0} = \frac{k(c + v)}{c} \quad (19)$$

Y teniendo en cuenta (17):

$$\frac{c}{k(c - v)} = \frac{k(c + v)}{c} \quad (20)$$

$$c^2 = k^2(c^2 - v^2) \quad (21)$$

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \quad (22)$$

Reinterpretación de la transformación de Lorentz — 7

$$k = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (23)$$

que es el famoso factor relativista  $\gamma$ .

**15** Reemplazando  $k$  por  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  obtenemos la transformación de Lorentz para el eje X:

$$x_v = \gamma(x_o + vt_o) = \frac{x_o + vt_o}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (24)$$

$$x_o = \gamma(x_v - vt_v) = \frac{x_v - vt_v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (25)$$

Las ecuaciones para los ejes Y y Z tienen una forma similar.

**16** La transformación para el eje del tiempo requiere una breve dosis de álgebra elemental. Empezando por:

$$x_v = \gamma(x_o + vt_o) \quad (26)$$

$$x_o = \gamma(x_v - vt_v) \quad (27)$$

y reemplazando la  $x_v$  de (27) por su expresión en (26), se obtiene:

$$x_o = \gamma(\gamma(x_o + vt_o) - vt_v) = \quad (28)$$

$$\frac{x_o}{v\gamma} = \gamma \left( \frac{x_o}{v} + t_o \right) - t_v \quad (29)$$

$$t_v = \gamma \left( \frac{x_o}{v} + t_o \right) - \frac{x_o}{v\gamma} \quad (30)$$

$$= \gamma \left( \frac{x_o}{v} + t_o - \frac{x_o}{v\gamma^2} \right) \quad (31)$$

8 — Relatividad en CALM

$$= \gamma \left( t_0 + \frac{x_0}{v} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right) \quad (32)$$

$$= \gamma \left( t_0 + \frac{x_0 v^2}{v c^2} \right) \quad (33)$$

$$= \frac{t_0 + \frac{x_0 v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \left( t_0 + \frac{x_0 v}{c^2} \right) \gamma \quad (34)$$

Y de forma similar:

$$t_0 = \frac{t_v - \frac{x_v v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \left( t_v - \frac{x_v v}{c^2} \right) \gamma \quad (35)$$

Queda claro entonces el papel de  $\gamma$  en la transformación de Lorentz.

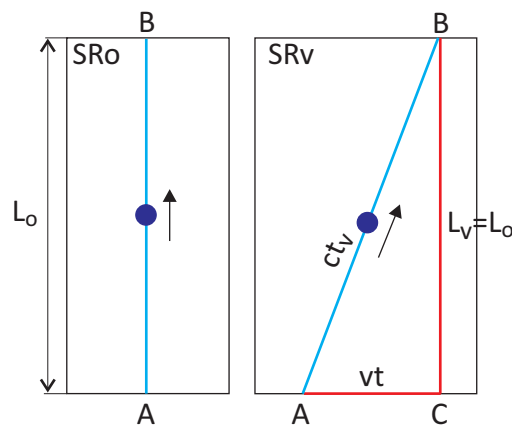


Figure 1.3: El movimiento de un fotón desde  $A$  hasta  $B$  visto desde  $RF_0$  (izquierda) y desde  $RF_v$  (derecha). En ciertas geometrías discretas, como nuestro CALM,  $AB$  tiene el mismo número de sits que  $AC$ , de modo que el fotón tarda el mismo tiempo en ir de  $A$  a  $B$  que de  $C$  a  $B$ .

**17** Supongamos ahora que en  $RF_0$  un fotón atraviesa la distancia vertical  $L_0$  desde  $A$  hasta  $B$  en un tiempo  $t_0 = L_0/c$  (Figura 1.3). Desde

la perspectiva de  $RF_v$ , que se mueve respecto a  $RF_o$  en la dirección del eje  $X_o$ , el mismo fotón atraviesa la distancia  $L_v$  desde  $A$  hasta  $B$ , que es ahora la hipotenusa del triángulo rectángulo  $ABC$ , en un tiempo  $t_v$ . Evidentemente se verifica:

$$t_v = \frac{\sqrt{L_o^2 + (vt)^2}}{c} \quad (36)$$

que tras algo de álgebra nos lleva a  $t_v = \gamma t_o$ .

**18** Al igual que en la relatividad especial, en un CALM también existe una velocidad máxima insuperable (un sit por tit) y cada CALM tiene sus propias leyes universales que siempre se aplican de la misma manera. Pero  $\gamma$  puede ser interpretada de una manera muy diferente. De acuerdo con el teorema discreto de Pitágoras en ambos sistemas de referencia,  $RF_o$  y  $RF_v$ , el fotón atraviesa el mismo número de sits. De modo que para transformar las distancias de la geometría CALM en distancias de la geometría del continuo tendremos que hacer uso de la proporción (figura 1.3):

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 - (AC)^2}} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - AC^2/AB^2}} \quad (38)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (vt_v)^2/(ct_v)^2}} \quad (39)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (40)$$

$$= \gamma \quad (41)$$

El mismo argumento se puede aplicar al ejemplo anterior 7 del in-

terferómetro del tipo Michelson-Morley, siendo en ese caso  $AB$  la distancia continua que la luz atraviesa en la dirección perpendicular a  $v$  y  $BC$  la correspondiente distancia discreta.

**19** La dilatación del tiempo, la diferencia de fase en la sincronización y el incremento de la masa con movimiento relativo pueden derivarse también de la transformación de Lorentz. Deberíamos entonces considerar la posibilidad de que la relatividad especial sea una consecuencia de describir un mundo digital con las matemáticas analógicas del continuum. Si ese fuera el caso, el factor relativista  $\gamma$ , y en consecuencia la transformación de Lorentz, se podría considerar como un operador que transforma las distancias y los tiempos digitales en continuos.

**20** La discusión anterior sugiere la posibilidad de dos interpretaciones para la teoría especial de la relatividad: la interpretación clásica o continua basada en la geometría del continuum y la interpretación discreta o digital basada en las geometrías discretas. En los próximos capítulos discutiremos algunos inconvenientes de la interpretación clásica que no aparecen en la interpretación discreta.

## Bibliography

- [1] Max Born, *Einstein's theory of relativity*, Dover Publications Inc., New York, 1965.