1.-La ley de Hook y la relatividad especial

¡Incluso un genio como Isaac Newton fue incapaz de definir la masa inercial!

Max Jammer

El concepto de masa

1 La masa, el espacio y el tiempo continúan siendo tres nociones fundamentales de la física que hasta el momento hemos sido incapaces de definir. Podrían ser conceptos primitivos, indefinibles. Aunque también es posible que hayamos estado tratando de definirlos dentro de un marco teórico inapropiada, como las matemáticas del continuum.

2 En el caso de la masa hemos encontrado definiciones operacionales, pero en el caso del espacio y el tiempo ni siquiera eso. Además, los componentes elementales del espacio y el tiempo (punto e instantes) carecen de sentido físico; son simplemente considerados como elementos abstractos de conjuntos infinitos densamente ordenados: entre dos puntos (o instantes) cualesquiera existen otros infinitos puntos. Así, la teoría especial de la relatividad, que es una teoría sobre el espaciotiempo, es una teoría sobre una entidad física de cuya identidad no sabemos absolutamente nada. Discutiremos sobre el espacio tiempo en los próximos capítulos, sobre todo en el Capítulo **??** sobre mecánica discreta. En éste nos ocuparemos de algunas discusiones relativistas en las cuales está implicada la masa.

3 Newton referred to mass as the *quantity of matter*. Accordingly, he defined mass in terms of bulk and density [8], which evidently is a circular definition. As they have been all subsequent definitions of mass, except operational ones (5). In consequence, all axiomatic mechanics have to include mass as a primitive notion.

4 La mayoría de los autores distinguen entre masa gravitacional y masa inercial. Incluso entre masa gravitacional activa (intensidad de su campo gravitatorio) y masa gravitacional pasiva (respuesta a un campo gravitatorio dado). Sin embargo los experimentos indican con toda claridad que no hay diferencias físicas entre la masa inercial y la gravitacional.

5 La masa inercial m de un objeto es invariablemente *definida* en términos operativos como la razón:

$$m = \frac{F}{a} \tag{1}$$

donde F es la fuerza aplicada a un objeto y a la aceleración resultante (Segunda Ley de Newton de la mecánica). Pero aunque a puede ser definida cinemáticamente en términos de nociones más básicas de espacio y tiempo:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2}$$

no es posible hace lo mismo con el concepto de fuerza..

6 Decir que $m = F/a$ no es decir mucho, a menos que especifiquemos que es una fuerza, sin caer en definiciones circulares. Como mucho, lo que podemos decir es que si aplicamos la misma fuerza a dos objetos diferentes O_1 y O_2, y siendo a_1 y a_2 las correspondientes aceleraciones resultantes, entonces la razón de sus masas m_1/m_2 es la misma que la razón de sus respectivas aceleraciones a_2/a_1. Si elegimos, por ejemplo, m_2, como la unidad estándar de masa, la masa inercial de cualquier objeto queda determinada de forma no ambigua (definición operacional de E. Mach)

7 Como en los casos de la dilatación inercial del tiempo, del desfase en la sincronización y de la contracción inercial de longitudes, el incremento inercial de la masa, es decir, el incremento de la masa debido al movimiento uniforme relativo, también se puede derivar de la transformación de Lorentz [6]. Si m_o es la masa propia de un objeto O en su sistema de referencia RF_o, la masa de ese objeto un sistema de referencia RF_v que se mueve con relación a RF_o con una velocidad uniforme v será:

$$m_v = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

En las secciones siguientes discutiremos algunos inconvenientes de este incremento relativista de la masa.

8 Al contrario de la contracción de longitudes, de la dilatación del tiempo y del desfase en la sincronización, que parecen más bien enigmáticos desde un punto de vista físico, el incremento de la masa con la velocidad podría tiene un sentido físico. En efecto, teniendo en cuenta que existe un límite para la velocidad máxima, parece físicamente razonable que la energía requerida para acelerar un objeto de masa m se incremente a medida que la velocidad se aproxima a ese límite.

9 La hipótesis de que la masa, al menos la masa de las partículas con carga eléctrica, es anterior al famoso artículo de Einstein sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento. Autores como Thomson [9], Heaviside [3], Abraham [1] o Lorentz [7] defendieron la idea de que las masas de partículas eléctricas aumenta con la velocidad [5].

10 Einstein dedujo su ecuación relativista para la masa de las ecuaciones de movimiento:

$$m_o \frac{d^2 x_o}{dt^2} = eE_{ox} \tag{4}$$

$$m_o \frac{d^2 y_o}{dt^2} = eE_{oy} \tag{5}$$

$$m_o \frac{d^2 z_o}{dt^2} = eE_{oz} \tag{6}$$

donde e es la carga de la partícula en movimiento y (E_{ox}, E_{oy}, E_{oz}) las componentes del campo eléctrico $\vec{E}_o$ en su propio sistema inercial de referencia RF_o. La transformación de Lorentz y la transformación relativista de los campos eléctricos $\vec{E}$ magnéticos $\vec{B}$ debida al propio Einstein conducen a:

$$m_o \gamma^3 \frac{d^2 x_v}{dt^2} = eE_{vx} = eE_{ox} \tag{7}$$

$$m_o \gamma^2 \frac{d^2 y_v}{dt^2} = \gamma e[E_{vy} - (v/c)B_{vz}] = eE_{oy} \tag{8}$$

$$m_o \gamma^2 \frac{d^2 z_v}{dt^2} = \gamma e[E_{vz} - (v/c)B_{vy}] = eE_{oz} \tag{9}$$

que representan el mismo movimiento de la partícula eléctrica desde la perspectiva de otro sistema de referencia inercial RF_v que se mueve con relación a RF_o con una velocidad v en la dirección positiva del eje X_o. De ambos conjuntos de ecuaciones y de la segunda ley de Newton, Einstein finalmente dedujo:

$$m_v = \gamma^3 m_o \tag{10}$$

que M. Planck convirtió en:

$$m_v = \gamma m_o \tag{11}$$

reemplazando la definición de fuerza usada por Einstein.

11 La ecuación (11) se puede deducir mediante otro argumento independiente y no relativista que asume como hipótesis[1] inicial la

[1] La deducción de Einstein de la relación masa-energía $E = mc^2$ fue considerada como un argumento circular por algunos autores como H. E. Ives [4], lo que para otros autores era un indicativo de su genialidad. Véase el Capítulo **??**.

relación masa-energía [2]. Así es, supongamos que la energía E de un cuerpo en reposo es $m_o c^2$. De acuerdo con los fundamentos clásicos de la mecánica, podemos escribir:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{12}$$

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d(m\vec{v})}{dt} \tag{13}$$

$$c^2 \frac{dm}{dt} = v \frac{d(mv)}{dt} \tag{14}$$

Multiplicando ambos lados por 2m:

$$c^2 2m \frac{dm}{dt} = 2mv \frac{d(mv)}{dt} \tag{15}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\frac{d(c^2 m^2)}{dt} = c^2 2m \frac{dm}{dt}; \ \frac{d(mv^2)}{dt} = 2mv \frac{d(mv)}{dt} \tag{16}$$

la ecuación (15) se convierte en:

$$\frac{d(c^2 m^2)}{dt} = \frac{d(m^2 v^2)}{dt} \tag{17}$$

Y siendo iguales ambas derivadas, se ha de verificar:

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + C \tag{18}$$

donde C es una constante. En el caso especial $v = 0$ tendremos:

$$m_o c^2 = 0 + C \tag{19}$$

Y reemplazando C por $m_o c^2$ en (18) y reagrupando:

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_o^2 c^2 \tag{20}$$

$$m^2 = m^2 \frac{v^2}{c^2} + m_o^2 \tag{21}$$

$$m^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = m_o^2 \tag{22}$$

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_o \gamma \tag{23}$$

12 Tenemos, por tanto, dos deducciones para el incremento de la masa con la velocidad. La primera a partir de la transformación de Lorentz; la segunda a partir de la mecánica clásica y de *hipótesis* $E = mc^2$. En la sección siguiente discutiremos algunos inconvenientes de la primera de ellas.

Escenario

13 Considérese una sistema de referencia inercial RF_o formado por un asteroide A cuya masa en reposo es M_o. Siendo inercial, A está libre de toda perturbación gravitatoria exterior. Sobre la superficie de A se encuentra el instrumento representado en la figura 1.1, que consiste en una banda elástica vertical uno de cuyos extremos se encuentra unido al brazo horizontal de un soporte formado por dos brazos ortogonales, mientras que del otro cuelga una esfera de metal cuya masa en reposo es m_o. En el equilibrio, el peso de la masa colgante estira la banda elástica una longitud L_o. Con el fin de evitar discusiones innecesarias también asumiremos que la masa colgante emite un rayo láser horizontal hacia el soporte vertical activando uno de los sensores de luz de la columna de sensores colocados en el soporte vertical. Una vez activado, el sensor emite una luz visible cuyo color es diferente en cada sensor.

14 Como se señaló anteriormente (4), asumiremos la equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitacional, por lo que cualquier variación en una de ellas será asumido que implica la misma variación en la otra.

15 Suponiendo que la banda elástica verifica la ley de Hooke y que

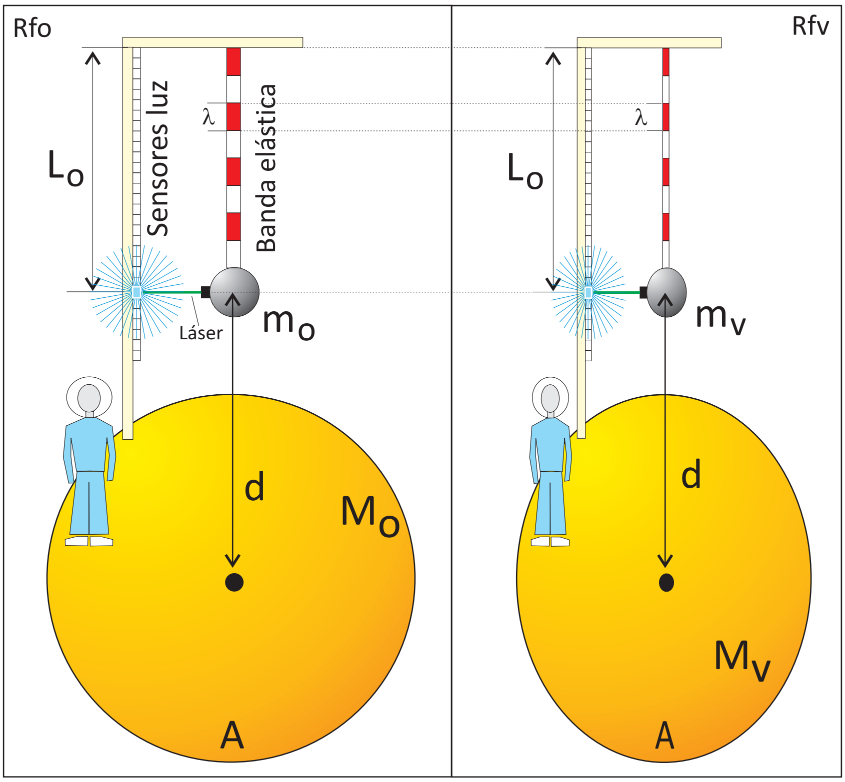

Figure 1.1: En el equilibrio, y en su sistema propio de referencia RF_o, la banda está estirada una longitud L_o debido el peso de la masa colgante m_o (izquierda). La misma longitud L_o se apreciará desde cualquier otro sistema de referencia inercial RF_v en movimiento relativo respecto a RF_o en una dirección horizontal (derecha).

todos los observadores conocen su constante de estiramiento k, podemos escribir:

$$F = m_o g_a = -kL_o \tag{24}$$

donde g_a es la gravedad GM_o/d^2 de asteroide, d es la distancia desde el centro de masas de m al centro de masas de A, y k la constante de la banda elástica. Tomando valores absolutos, los observadores de RF_o pueden escribir:

$$L_o = G\frac{m_o M_o}{kd^2} \tag{25}$$

Discusión

16 Sea ahora RF_v un sistema de referencia inercial cualquiera desde el cual RF_o se mueve con una velocidad v en una dirección perpendicular a la dirección de estiramiento de la banda elástica. De acuerdo con sus *cálculos* relativistas los observadores de RF_v pueden escribir:

$$L_v = G\frac{\gamma m_o \gamma M_o}{kd^2} = G\frac{m_o M_o}{kd^2}\gamma^2 \tag{26}$$

Además de:

$$L_v = L_o \tag{27}$$

Así, tendríamos:

$$G\frac{m_o M_o}{kd^2} = G\frac{m_o M_o}{kd^2}\gamma^2 \tag{28}$$

que solo se cumple si $\gamma = 1$, i.e. si $v = 0$. Y lo que es peor, puesto que γ depende de la velocidad relativa v, los observadores de diferentes RF_v calcularán diferentes longitudes L_v. El problema es que todos ellos observarán y medirán la misa longitud de estiramiento L_o que en RF_o.

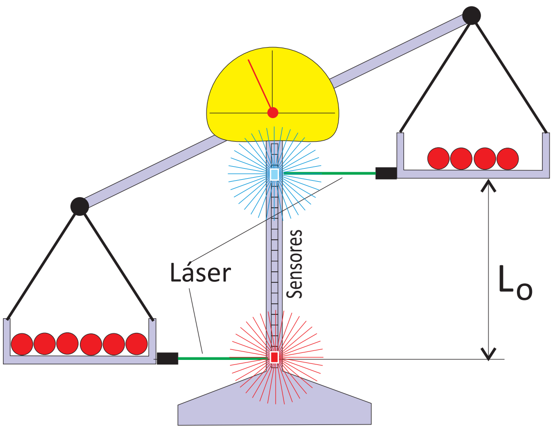

Figure 1.2: L_o es la misma para todos los observadores que se muevan respecto a la balanza con velocidad uniforme y en dirección perpendicular a su soporte vertical.

17 Sustituyamos ahora la banda elástica del asteroide por una balanza equipada con un sistema de rayos láser y sensores similar al del caso anterior de la banda elástica. Supongamos que su platillo izquierdo contiene seis bolas mientras que el derecho contiene cuatro bolas, teniendo las diez bolas la misma masa m_o. En esas condiciones, el platillo derecho se encontrará elevado y el izquierdo hundido, siendo $\Delta_o m = 2m_o$ la causa del desequilibrio.

18 Sea L_o la distancia vertical entre los platillos. Como en el caso de la banda elástica, y por las mismas razones, L_o será igual para todos los observadores en reposo o en movimiento relativo en una dirección perpendicular el eje vertical de equilibrio de la balanza, aunque la causa del desequilibrio $\Delta_v m = 2\gamma m_o$ será diferente para las diferentes velocidades relativas.

19 La conclusión es la misma que en el caso de la banda elástica: en cada RF_v los observadores calcularán una longitud L_v diferente pero todos ellos verán y medirán la misma longitud L_o que en RF_o si la dirección del movimiento relativo es perpendicular a L_o.

Bibliography

[1] M. Abraham, *Prinzipien der dynamik des elektrons*, Annalen der Physik **315 (1)** (1903), 105–179.

[2] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands, *Lectures on Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1977.

[3] O. Heaviside, *On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric*, Philosophical magazine **5, 27** (1889), 324–339.

[4] H. E. Ives, *Derivation of the mass-energy relation*, Journal of the Optical Society **42** (1952), 540–543.

[5] Max Jammer, *Concepts of mass in classical and modern physics*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1961.

[6] ______, *Concepts of mass in contemporary physics and philosophy*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2000.

[7] H. A. Lorentz, *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light*, Proceeding of the Royal Netherlands Academy of Sciences and Arts **6** (1904), 809–831.

[8] Isaac Newton, *Principios matemáticos de la filosofía natural*, Alianza, Madrid, 1987.

[9] J. J. Thomson, *On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies*, Philosophical magazine **5, 11** (1881), 229–249.