

1.-Divisibilidad del espaciotiempo

1.1 El menor ordinal infinito

1.1.1 El primer ordinal infinito¹ ω es el menor ordinal mayor que todos los ordinales finitos. Define un tipo de buen orden llamado ω -orden: un conjunto o sucesión es ω -ordenada si tiene un primer elemento y cada elemento tienen un sucesor inmediato y un predecesor inmediato, excepto el primero.² En consecuencia no existe último elemento en una sucesión o conjunto ω -ordenado. El conjunto de los números naturales en su orden natural de precedencia es un ejemplo bien conocido de conjunto ω -ordenado.

1.1.2 El ω^* -orden es el reflejo simétrico del ω -orden: una sucesión o conjunto es ω^* -ordenado si tiene un último elemento y cada elemento tiene un predecesor inmediato y un sucesor inmediato, ex-

¹Los ordinales infinitos son los ordinales de la segunda clase de acuerdo con la terminología clásica de Cantor [4]. Un ordinal de la segunda clase es de la primera especie si, como ω , es el límite de una sucesión infinita de ordinales; es de la segunda especie si es de la forma $\alpha + n$, donde α donde de la segunda clase y segunda especie y n un ordinal finito.

²Entre un elemento y su sucesor inmediato no existe ningún otro elemento de la sucesión.

cepto el último. En consecuencia no existe el primer elemento:

$$\overbrace{\dots t_{3^*}, t_{2^*}, t_{1^*}}^{\omega^* \text{-order}} \mid \overbrace{t_1, t_2, t_3, \dots}^{\omega \text{-order}} \quad (1)$$

done $1^*, 2^*, 3^*, \dots$ significan último, penúltimo, antepenúltimo, etc.

1.1.3 Cantor demostró que el ω -orden es una consecuencia de la hipótesis del infinito actual; una consecuencia de asumir la existencia de conjuntos infinitos como totalidades completas [4]. Nótese que las sucesiones ω -ordenadas son completas (tal como requiere el infinito actual) e incompletas (en el sentido de que no existe un último elemento que las complete).

1.1.4 De acuerdo con la definición de ω -orden 1.1.1, cada elemento de un conjunto ω -ordenado tiene un número finito de predecesores y un número infinito de sucesores (ω -asimetría). Esta inmensa asimetría en el número de predecesores y sucesores es un hecho bien conocido, aunque suele ser ignorado en la literatura infinitista, particularmente en la literatura sobre supertareas.

1.2 Supertareas superasimétricas

1.2.1 Al inicio de la segunda mitad del siglo XX, las discusiones sobre la posibilidad de realizar una infinitud contable de acciones en un intervalo finito de tiempo (una supertarea según J. F. Thomson [13]) promovió el desarrollo de una nueva teoría infinitista: la teoría de supertareas.³ Las posibilidades de realizar una infinitud no contable de acciones fueron examinadas, y descartadas, por P.

³ [3], [15], [13], [14], [2]

Clark y S. Read [5]. Las supertareas han sido también consideradas desde la perspectiva del análisis no estándar,⁴ aunque las posibilidades de realizar una hipertarea durante un intervalo hiperreal de tiempo no han sido discutidas, a pesar de que los intervalos finitos hiperreales se pueden dividir en una infinidad hipercontable de intervalos infinitesimales (particiones hiperfinitas).⁵ Pero la mayoría de las supertareas son ω -supertasks, i.e. sucesiones ω -ordenadas de acciones realizadas durante un intervalo finito (o percibido como finito) de tiempo.

1.2.2 Sea $\langle t_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión ω -ordenada cualquiera dentro del intervalo finito real (t_a, t_b) cuyo límite es t_b . Y sea S una supertarea cuyas infinitas acciones $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ son realizadas en sucesivos instantes de $\langle t_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, cada acción a_i realizada en el preciso instante t_i .

1.2.3 Conviene recordar que el límite t_b no es el instante en el cual termina⁶ S sino el primer instante después de que S haya terminado, el primer instante después de que se hayan realizado todas las acciones de $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$. Siendo t_b el límite de $\langle t_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, en cualquier instante t anterior a t_b y arbitrariamente cercano a él, solo un número finito de acciones se habrán realizado, mientras que un número infinito de ellas quedan aún por realizar (ω -asimetría).

1.2.4 Para comprender la colosal magnitud de la ω -asimetría anterior, supóngase que el intervalo $[t_a, t_b]$ es trillones de veces mayor que la edad del universo y considérese un intervalo de tiempo $\tau = 0.000 \dots 001$ segundos tan pequeño que serían necesarios trillones y

⁴[11], [10], [1], [9]

⁵[12], [6], [8], [7], etc.

⁶No existe un instante en el que S termina porque $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ es ω -ordenada y las sucesiones ω -ordenadas no tienen último elemento.

trillones de páginas de texto estándar para escribir todos los ceros entre la coma decimal y la última cifra 1, un número de páginas tan inmenso que no cabrían en el universo visible actual⁷; pues bien, solo un número finito de tareas se habrá realizado durante los trillones de años transcurridos entre t_a and $t_b - \tau$, mientras que un número infinito de acciones, prácticamente todas ellas, tendrán que ser realizadas durante el inimaginablemente pequeño interval de tiempo τ . Más que antiestética, la ω -asimetría es repulsiva.

1.3 Dicotomías del espaciotiempo

1.3.1 Considérese cualquier intervalo finito de tiempo $[t_a, t_b]$ y dentro de él dos sucesiones de instantes, la sucesión ω -ordenada de instantes t :

$$\langle t_i \rangle : t_i = t_a + \frac{2^i - 1}{2^i} (t_b - t_a), \forall i \in \mathbb{N} \quad (2)$$

y la sucesión ω^* -ordenada de instantes t^* :

$$\langle t_{i^*}^* \rangle : t_{i^*}^* = t_a + \frac{1}{2^i}, \forall i \in \mathbb{N} \quad (3)$$

donde i^* representa $(i - 1)$ -ésimo elemento por la cola de la sucesión ω^* -ordenada $\langle t_{i^*}^* \rangle_{i \in \mathbb{N}}$.

1.3.2 Examinaremos ahora la forma en la que transcurren los sucesivos t^* -instantes de $\langle t_n^* \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ y los sucesivos t -instantes de $\langle t_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ a medida que el tiempo pasa de t_a a t_b , para lo cual consideraremos los dos siguientes funciones:

$$f^*(t) = \text{número de } t^* \text{-instantes transcurridos en el instante } t, \forall t \in [t_a, t_b] \quad (4)$$

⁷A sphere of 93000 billions light years.

$f(t)$ = número de t -instantes aún por transcurrir en el instante $t, \forall t \in [t_a, t_b]$ (5)

1.3.3 De acuerdo con las definiciones de ω^* -orden y del ω -orden, podemos escribir:

$$f^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t = t_a \\ \aleph_0 & \text{if } t > t_a \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} \aleph_0 & \text{if } t < t_b \\ 0 & \text{if } t = t_b \end{cases} \quad (6)$$

En caso contrario, si siendo n un número natural, existiera un instante t tal que $f^*(t) = n$, o bien $f(t) = n$, entonces existirían los imposibles n primeros términos de una sucesión ω^* -ordenada, o bien los imposibles n últimos términos de una sucesión ω -ordenada.

1.3.4 De acuerdo con 1.3.3, las funciones f^* y f están bien definidas para todo t en $[t_a, t_b]$; hacen corresponder cada elemento de $[t_a, t_b]$ con un elemento del conjunto $\{0, \aleph_0\}$:

$$f^* : [t_a, t_b] \mapsto \{0, \aleph_0\} \quad (7)$$

$$f : [t_a, t_b] \mapsto \{0, \aleph_0\} \quad (8)$$

1.3.5 La función f^* define, por tanto, una dicotomía, la t^* -dicotomía:

- Con relación al número de t^* -instantes transcurridos a medida que el tiempo pasa de t_a a t_b solo dos valores son posibles: 0 y \aleph_0 .

La función f también define una dicotomía, la t -dicotomía:

- Con relación al número de t -instantes que quedan por transcurrir a medida que el tiempo pasa de t_a a t_b solo son posibles dos valores: \aleph_0 y 0.

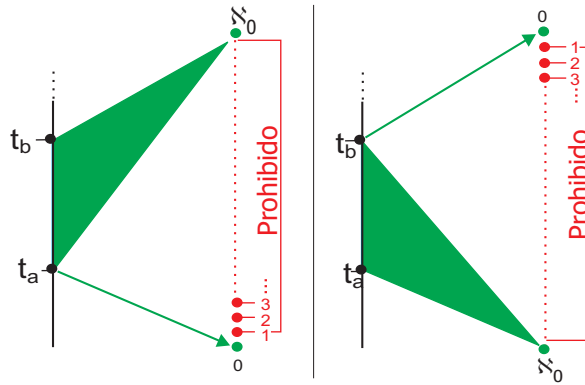


Figure 1.1: t^* -dicotomía (izquierda) y t -dicotomía (derecha)

1.3.6 Con respecto al número de t^* -instantes transcurridos desde t_a , el paso del tiempo desde t_a a t_b solo puede exhibir dos estados: el estado $S^*(0)$ en el cual no ha transcurrido todavía ningún t^* -instante, y el estado $S^*(\aleph_0)$ en el cual una infinidad contable (\aleph_0) de t^* -instantes ha transcurrido ya. No son posibles los estados finitos intermedios $S^*(n)$ en los cuales solo hayan transcurrido un número finito n de t^* -instantes. El paso del tiempo llega ser $S^*(\aleph_0)$ *directamente* a partir $S^*(0)$. De igual manera, con respecto al número de t -instantes aún por transcurrir, el paso del tiempo desde t_a hasta t_b solo puede exhibir dos estados: $S(\aleph_0)$ y $S(0)$, sin estados finitos intermedios $S(n)$ en los que solo quedarán por transcurrir un número finito n de t -instantes. El paso del tiempo alcanza el estado $S(0)$ *directamente* a partir de $S(\aleph_0)$.

1.4 Divisibilidad del espaciotiempo

1.4.1 Examinaremos ahora la duración de las transiciones:

$$S^*(0) \rightarrow S^*(\aleph_0) \tag{9}$$

$$S(\aleph_0) \rightarrow S(0) \tag{10}$$

De acuerdo con (6) el número de t^* -instantes transcurridos desde t_a y el número de t -instantes aún por transcurrir desde t_a están bien definidos en todo el intervalo $[t_a, t_b]$. Por otra parte, ambas transiciones han de tener lugar dentro del mismo intervalo $[t_a, t_b]$.

1.4.2 Aunque el intervalo real $[t_a, t_b]$ está densamente ordenado, las sucesiones $\langle t_{i^*}^* \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ y $\langle t_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ contenidas en él, no lo están. Estas sucesiones son ω^* -ordenadas y ω -ordenadas respectivamente, lo que significa que los t^* -instantes y los t -instantes son estrictamente sucesivos, i.e entre cualquier t^* -instante y su inmediato sucesor no existe ningún otro t^* -instante; y lo mismo vale para los t -instantes. De esa forma, los t^* instantes y los t -instantes solo pueden transcurrir sucesivamente, y de tal modo que entre dos cualesquiera de esos sucesivos instantes siempre pasa un tiempo mayor que cero. En consecuencia, el número de t^* -instantes transcurridos desde t_a solo puede aumentar *de uno en uno*, desde 0 hasta \aleph_0 . Lo mismo vale para la forma en la que el número de t -instantes por transcurrir disminuye desde \aleph_0 hasta 0. Esta sucesividad juega un papel decisivo en la discusión que sigue.

1.4.3 Como consecuencia de la t^* -dicotomía, el número de t^* -instantes transcurridos desde t_a debe incrementarse uno a uno desde 0 hasta \aleph_0 sin atravesar la sucesión creciente de números naturales 1, 2, 3, Análogamente, el número de t -instantes por transcurrir debe decrecer de uno en uno, desde \aleph_0 hasta 0 sin atravesar la sucesión decreciente de números naturales . . . , 3, 2, 1.

1.4.4 La duración de la transición $S^*(0) \rightarrow S^*(\aleph_0)$ es, de acuerdo

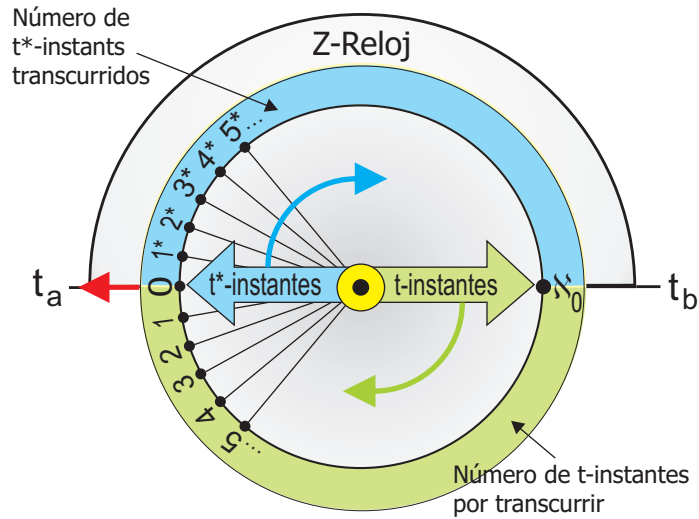


Figure 1.2: A medida que el tiempo pasa desde t_a hasta t_b la flecha de los t^* -instantes ha de girar en sentido de las agujas del reloj desde 0 hasta \aleph_0 sin pasar sobre los sucesivos radios 1, 2, 3, ... Al mismo tiempo, la flecha de los t -instantes ha de girar en sentido contrario de las agujas del reloj desde \aleph_0 hasta 0 sin pasar sobre los sucesivos radios ... 3, 2, 1.

con 1.4.2, el intervalo de tiempo dentro de $[t_a, t_b]$ durante el cual el número de t^* -instantes transcurridos desde t_a aumenta *de uno en uno* desde cero hasta \aleph_0 . De forma similar, la duración de la transición $S(\aleph_0) \rightarrow S(0)$ es el intervalo de tiempo dentro de $[t_a, t_b]$ durante el cual el número de t -instantes que han de transcurrir todavía disminuye *uno a uno* desde \aleph_0 hasta cero.

1.4.5 Puesto que entre dos t^* -instantes sucesivos siempre transcurre un intervalo de tiempo mayor que cero, entre un número infinito de tales instantes sucesivos habrá de pasar necesariamente un intervalo de tiempo mayor que cero. Por esa razón la transición $S^*(0) \rightarrow S^*(\aleph_0)$ durará necesariamente un intervalo de tiempo mayor de cero. La misma conclusión, y por las mismas razones, se habrá

de aplicar a la transición $S(\aleph_o) \rightarrow S(0)$.

1.4.6 Supongamos que la transición $S^*(0) \rightarrow S^*(\aleph_o)$ dura un tiempo τ , siendo τ cualquier número real positivo. Sea τ' cualquier instante del intervalo $(0, \tau)$. Si el número de t^* -instantes transcurridos en el instante $t_a + \tau'$ fuera cero entonces la transición no habría empezado y su duración sería menor que τ ; si ese número fuera \aleph_o la transición ya habría terminado en el instante $t_a + \tau'$ y su duración sería menor que τ . Pero 0 y \aleph_o son los dos únicos valores posibles para el número de t^* -instantes transcurridos desde t_a . En consecuencia, la duración de $S^*(0) \rightarrow S^*(\aleph_o)$ es menor que τ . Y siendo τ cualquier número real mayor que 0, hemos de concluir que la duración de $S^*(0) \rightarrow S^*(\aleph_o)$ es menor que cualquier número real mayor que cero. O con otras palabras, que tarda un tiempo nulo.

1.4.7 Un argumento similar a 1.4.6 prueba que la transición $S(\aleph_o) \rightarrow S(0)$ ha de ser también instantánea. Se podría argumentar que la transición $S(\aleph_o) \rightarrow S(0)$ dura un tiempo $t_b - t_a$, pero eso es imposible porque en el instante $t_a + \tau$, siendo τ cualquier instante de $(0, t_b - t_a)$, el número de t -instantes por transcurrir es \aleph_o , y entonces la transición $S(\aleph_o) \rightarrow S(0)$ no ha comenzado. Por tanto tarda un tiempo menor que $t_b - t_a$.

1.4.8 De acuerdo con 1.4.6 y 1.4.7, un número infinito de t^* -instantes sucesivos, y un número infinito de t -instantes sucesivos han de transcurrir simultáneamente. Pero eso es imposible porque los instantes sucesivos no pueden transcurrir de forma simultánea: entre dos cualesquiera de esos sucesivos instantes siempre transcurre un intervalo de tiempo mayor que cero. Las transiciones $S^*(0) \rightarrow S^*(\aleph_o)$ y $S(\aleph_o) \rightarrow S(0)$ han de ser mayores que cero pero no

pueden ser mayores que cero (1.4.6/1.4.7). Tenemos pues dos contradicciones que prueban la imposibilidad de dividir cualquier intervalo finito de tiempo en una infinitud actual de partes ω^* -ordenadas y en una infinitud de ω -ordenada de partes (véase el Z-reloj de la Figura 1.2).

1.4.9 Cualquier partición infinita del tiempo ha de ser α -ordenada, siendo α un ordinal de la segunda clase (y primera o segunda especie). Así, tendremos:

$$\alpha = \omega \tag{11}$$

$$\text{or} \tag{12}$$

$$\alpha = \omega + \beta \tag{13}$$

donde β es un ordinal de la segunda clase (primera o segunda especie). Por tanto, cualquier partición transfinita del tiempo ha de contener una imposible partición ω -ordenada. El tiempo no es, por tanto, infinitamente divisible.

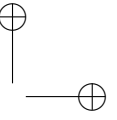
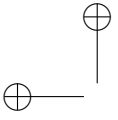
1.4.10 Si en lugar del paso del tiempo y de las sucesiones de t^* -instantes y de t -instantes, hubiéramos considerado el movimiento lineal uniforme de una partícula atravesando los Z^* puntos $\langle z_n^* \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ y los Z -puntos $\langle z_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ definidos en el intervalo $[0, 1]$ de la recta real por:

$$\langle z_i^* \rangle : z_i^* = \frac{1}{2^i}, \forall i \in \mathbb{N} \tag{14}$$

$$\langle z_i \rangle : z_i = \frac{2^i - 1}{2^i}, \forall i \in \mathbb{N} \tag{15}$$

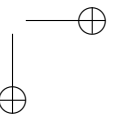
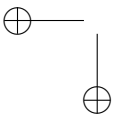
Habríamos llegado a la misma conclusión sobre la infinita divisibili-

dad del espacio que a la que hemos llegado sobre la infinita divisibilidad del tiempo.



References

12



Bibliography

- [1] Joseph S. Alper and Mark Bridger, *Mathematics, Models and Zeno's Paradoxes*, *Synthese* **110** (1997), 143 – 166.
- [2] Paul Benacerraf, *Tasks, Super-tasks, and Modern Eleatics*, *Journal of Philosophy* **LIX** (1962), 765–784.
- [3] M. Black, *Achilles and the Tortoise*, *Analysis* **XI** (1950 - 51), 91 – 101.
- [4] Georg Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, Dover, New York, 1955.
- [5] P. Clark and S. Read, *Hypertasks*, *Synthese* **61** (1984), 387 – 390.
- [6] Robert Goldblatt, *Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [7] James M. Henle and Eugene M. Kleinberg, *Infinitesimal Calculus*, Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2003.
- [8] H. Jerome Keisler, *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach*, second ed., Author, <http://www.wisc.edu/keisler/keislercalc.pdf>, September 2002.
- [9] William I. Macloughlin, *Thomson's Lamp is Dysfunctional*, *Synthese* **116** (1998), no. 3, 281 – 301.
- [10] William I. McLaughlin, *Una resolución de las paradojas de Zenón*, *Investigación y Ciencia (Scientific American)* (1995), no. 220, 62 – 68.

References

14

-
- [11] William I. McLaughlin and Silvia L. Miller, *An Epistemological Use of non-standard Analysis to Answer Zeno's Objections Against Motion*, *Synthese* **92** (1992), no. 3, 371 – 384.
 - [12] K. D. Stroyan, *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Academic Press, Inc, New York, 1997.
 - [13] James F. Thomson, *Tasks and Supertasks*, *Analysis* **15** (1954), 1–13.
 - [14] _____, *Comments on Professor Benacerraf's Paper, Zeno's Paradoxes* (Wesley C. Salmon, ed.), Hackett Publishing Company, Inc, Indianapolis/Cambridge, 2001, pp. 130 – 138.
 - [15] J. O. Wisdom, *Achilles on a Physical Racecourse*, *Analysis* **XII** (1951-52), 67–72.