SOBRE LA ARITMÉTICA TRANSFINITA DE CANTOR

Antonio Leon Sanchez
I.E.S Francisco Salinas, Salamanca, Spain
http://www.interciencia.es
aleon@interciencia.es

1. Aritmética transfinita

La última y más elaborada publicación de Georg Cantor sobre el infinito recibió el título de *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengelehre*, un trabajo de 70 páginas y 20 epígrafes publicado en dos partes en los años 1895 y 1897 ([4], [5]) y posteriormente traducido al inglés[1] como *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* [6], traducción realizada por el matemático Philip E. B. Jourdain en el año 1915. La edición que circula en nuestros días es la de 1955 y aún conserva un cierto número de errores tipográficos (y no tipográficos), de todo lo cual uno saca la conclusión de que no es una obra muy leída (por lo poco revisada). Suele ocurrir con los clásicos de la ciencia. Y es una lástima porque en muchos casos se trata de obras muy interesantes en las que casi siempre se acaba encontrando algún detalle que sus comentaristas modernos han pasado por alto. Es el caso de los *Beiträge*, una obra por otra parte muy asequible (las matemáticas necesarias para su lectura no van mucho más allá de las que se adquieren en los primeros cursos universitarios). El objetivo principal de Cantor en los *Beiträge* fue establecer los fundamentos de una teoría de los números transfinitos, cardinales y ordinales (sobre todo de los últimos). El análisis de esa fundamentación será el objetivo de este artículo. A pesar de su aparente complejidad, su lectura no requiere una preparación matemática especial.

2. El concepto de número. Números ordinales y cardinales

Cuando no podemos definir un objeto, lo que con frecuencia ocurre con los objetos más básicos de las matemáticas, su definición se sustituye por un conjunto de axiomas que establecen el modo de usar ese objeto en las discusiones formales. En este sentido podemos afirmar que no tenemos una definición explícita de número. Los

[1]La mayor parte del trabajo de Cantor permanece en su idioma original, el alemán.

axiomas de Peano establecen las reglas de juego con los números naturales y a partir de estos se construyen los demás tipos básicos de números: enteros, racionales, algebraicos, trascendentes, reales, complejos e hiperreales. Una estrategia alternativa, que ha sido muy productiva en las ciencias experimentales, consiste en relativizar las definiciones. Asumir nuestra incapacidad de dar definiciones absolutas y aceptar en su lugar las más modestas definiciones relativas. Así, podemos afirmar que un determinado número es la propiedad común que manifiestan todos los conjuntos cuyos elementos pueden emparejarse totalmente (mediante biyecciones o correspondencias uno a uno), por ejemplo el número 3 sería la propiedad común de todos los conjuntos cuyos elementos pueden emparejarse totalmente con los del conjunto $\{a, b, c\}$. De todos esos conjuntos decimos que tienen la misma cardinalidad. Renunciamos a explicar en qué consiste esa propiedad, simplemente asumimos su existencia, la identificamos y la manipulamos de acuerdo con ciertas convenciones. Naturalmente las definiciones relativas no son platónicas, son funcionales y están inevitablemente ligadas a las peculiaridades y limitaciones de nuestra propia capacidad intelectual, de nuestra forma humana de describir y explicar el mundo.

En el lenguaje común suele decirse que los números cardinales son los números de contar: 1, 2, 3, etc. Los ordinales, en el mismo uso coloquial, reflejan el orden o posición que un elemento ocupa en una lista: primero, segundo, tercero, etc. Lamentablemente en la teoría de conjuntos las cosas son bien distintas. Sobre todo por la existencia de conjuntos infinitos que complican enormemente el panorama numérico. En una primera aproximación podríamos admitir que el cardinal de un conjunto es una medida de la numerosidad del conjunto, de la *cantidad* de elementos que contiene (y con eso se conforman la mayor parte de las definiciones informales de cardinalidad). Para evitar el uso de la palabra número se suele hablar, desde los tiempos de Cantor, de potencia. Así hablamos de la cardinalidad o potencia de un conjunto para referirnos a esa cualidad abstracta del conjunto que identifica a todos los conjuntos que se pueden poner en correspondencia uno a uno con él. Pero no se puede ir mucho más lejos. Decir que el cardinal, o potencia de un conjunto, es el número de elementos del conjunto, aunque sirve para entendernos, no es decir gran cosa a menos que especifiquemos el significado de la palabra "número". La definición de Cantor (véase más abajo) es un ejemplo de las dificultades formales inherentes a las definiciones platónicas y absolutas. Confía el autor de los "Beiträge" en nuestra habilidad de contactar con el más allá trascendente mediante la habilidad mental de abstraer. Aunque, ni Cantor ni nadie ha logrado explicar de forma adecuada y convincente y sin usar la noción imprecisa de número, qué diablos es ese concepto general doblemente abstraído al que se refiere la definición cantoriana. Mas que la definición de cardinal, Cantor nos propone la forma de evaluarlos [13].

Los números ordinales representan, en sentido coloquial, la posición dentro de una lista ordenada: primero, segundo, tercero, etc. Puede pensarse del ordinal de un conjunto que corresponde a la posición que ese conjunto ocuparía en una lista cuya primera posición estaría ocupada por todos los conjuntos de un elemento, la segunda por los de dos, la tercera por los de tres etc. Como puede verse en los conjuntos finitos solo hay un tipo de ordinalidad: todos los conjuntos con el mismo cardinal tienen el mismo ordinal, que además coincide con el cardinal. Así el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ tiene por cardinal y ordinal el mismo número, el 5. En el caso de los conjuntos infinitos el cardinal y el ordinal ya no coinciden. Además existe una infinidad de ordinales distintos para un mismo cardinal (véase más abajo). Es un rasgo distintivo de los conjuntos infinitos tanto la falta de coincidencia como la multiplicidad infinita de ordinales con el mismo cardinal. Cantor probó que esa infinidad es mayor que la infinidad contable: el cardinal del conjunto de todos los ordinales correspondientes a los conjuntos numerables es $\aleph_1$, el siguiente alef mayor que $\aleph_0$. El conjunto de todos los ordinales es un conjunto bien ordenado al que le corresponde su propio ordinal, el primer ordinal de la 3ª clase (véase más abajo). Tendremos ocasión de comprobar que, en efecto, el panorama numérico se complica extraordinariamente como consecuencia de los conjuntos infinitos actuales. Además, y como también veremos, los cardinales y ordinales transfinitos exhiben una aritmética radicalmente distinta a la de los números finitos.

Cantor debió de sentirse muy orgulloso de su sistema numérico de cardinales y ordinales. La presentación que hace de ellos en sus *Beiträge* es la de un sistema que pretende ser definitivo y completo ([6], p. 117):

> El concepto de "tipo ordinal" desarrollado aquí... en unión del concepto de cardinal o potencia introducido en el epígrafe 1 incluyen cualquier cosa imaginable que pueda ser numerada, y en este sentido no puede haber generalizaciones posteriores. No se trata de algo arbitrario, sino que es la extensión natural del concepto de número.

Queda clara la opinión que Cantor tiene de su propia teoría de los números.

3. Cardinales. Aritmética de cardinales

En el epígrafe 1 de los *Beiträge* Cantor define la noción de cardinal o potencia de un conjunto de la siguiente forma (Cantor [6], p. 86):

> Todo conjunto M tiene una "potencia" definida, a la cual también llamaremos su "número cardinal."
>
> Llamaremos "potencia" o "número cardinal" de M al concepto general que, por medio de nuestra capacidad de abstraer, surge del conjunto M cuando hacemos abstracción de la naturaleza de sus diversos elementos m y del orden en el cual estos elementos vienen dados.

Cuando de un conjunto abstraemos la naturaleza y el orden de sus elementos solo nos queda el número de los mismos. Cantor nos dice que la potencia o número cardinal $\overline{\overline{M}}$ de un conjunto M es el número de sus elementos, aunque sin usar la palabra número en la definición (definiens). Continúa Cantor diciendo que si abstraemos la naturaleza de un elemento nos queda una unidad. El cardinal de un conjunto es, visto por Cantor, como un agregado compuesto de unidades. Una vez definidos los cardinales, Cantor define la equivalencia de conjuntos: dos conjuntos M y N son equivalentes, simbólicamente $M \sim N$ si es posible establecer una correspondencia uno a uno entre ellos. A continuación prueba un resultado importante que establece que dos conjuntos tienen el mismo cardinal si, y solo si, son equivalentes. Define entonces la relaciones de mayor y menor entre cardinales y las operaciones de adición y multiplicación de cardinales: si M y N son dos conjuntos disjuntos tales que $\overline{\overline{M}} = a$ y $\overline{\overline{N}} = b$, entonces (utilizando símbolos modernos):

$$a + b = \overline{\overline{M \cup N}} \tag{1}$$

$$a \times b = \overline{\overline{M \times N}} \tag{2}$$

donde $M \times N$ es el conjunto producto de M por N (el conjunto de todas las parejas de elementos cuyo primer componente pertenece a M y cuyo segundo pertenece a N). Definidas la suma y multiplicación, Cantor define la exponenciación de cardinales, una operación particularmente importante en su aritmética de cardinales. Primero define lo que él llama recubrimiento de un conjunto con los elementos de otro ([6], pág. 94):

> Por recubrimiento de un conjunto N con elementos de otro conjunto M, o simplemente, por recubrimiento de N con M, entendemos una ley por la cual cada elemento n de N se asocia con un elemento

> definido de M, de forma que el mismo elemento de M puede ser repetidamente asociado [a otros elementos de N]. El elemento de M que se asocia con n es una función de n, y puede ser representado por $f(n)$; se le llama "función de recubrimiento de n." El recubrimiento de N será denotado por $f(N)$.

Por ejemplo, un recubrimiento del conjunto $N = \{x, y, z\}$ por el conjunto $M = \{0, 1\}$ es 110; otro sería 111, otro 001, etc. Cada elemento del primer conjunto, en nuestro caso x, y, y z, puede ser reemplazado por uno de los elementos del otro conjunto: x puede ser reemplazado (recubierto) por 0 o por 1, y lo mismo ocurre con y y con z. El conjunto de todos los recubrimientos de N con M se escribe $(N|M)$. N es el conjunto recubierto y M el conjunto recubriente. Por ejemplo, el conjunto de todos los recubrimientos de $\{a,\ b,\ c\}$ por $\{0,\ 1\}$ es:

$$(\{a, b, c\}|\{1, 0\}) = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\} \tag{3}$$

Prueba entonces Cantor que si M y M' son equivalentes y también lo son N y N' entonces los conjuntos $(N|M)$ y $(N'|M')$ son también equivalentes. En consecuencia el cardinal del conjunto $(N|M)$ solo depende de los cardinales $\overline{\overline{M}} = a$ y $\overline{\overline{N}} = b$. Esa independencia le permite definir la exponenciación de cardinales: si a es el cardinal del conjunto M y b el del conjunto N entonces:

$$a^b = (\overline{\overline{N|M}}) \tag{4}$$

El "exponente" b es el cardinal del conjunto recubierto N mientras que la "base" a es el cardinal del conjunto recubriente M. Además de definir las operaciones de suma, multiplicación y exponenciación de cardinales, Cantor prueba las propiedades de cada una de esas operaciones aritméticas: la suma es asociativa y conmutativa; la multiplicación asociativa, conmutativa y distributiva con respecto a la suma. La exponenciación verifica:

$$a^b \times a^c = a^{b+c} \tag{5}$$

$$a^c \times b^c = (a \times b)^c \tag{6}$$

$$(a^b)^c = a^{b \times c} \tag{7}$$

donde a, b y c son tres cardinales. Una vez definidas y analizadas las operaciones básicas con cardinales, Cantor prosigue su trabajo de fundamentación, aunque lo hace siguiendo un orden diferente al que, por razones de claridad, seguiremos aquí.

En el epígrafe 5 de sus *Beiträge* Cantor expone una fundamentación rigurosa de la teoría de los números finitos basada en la noción de cardinal, fundamentación muy parecida a la que suele darse en muchos textos contemporáneos: a un conjunto formado por un solo elemento, $E_0 = \{e_0\}$, le hacemos corresponder un número cardinal que llamamos "uno" y que expresamos con el numeral "1":

$$1 = \overline{\overline{E_0}} \tag{8}$$

Si añadimos a E_0 un nuevo elemento e_1 obtenemos un nuevo conjunto E_1:

$$E_1 = \{E_0, e_1\} = \{e_0, e_1\} \tag{9}$$

a cuyo cardinal llamamos "dos" y representamos por el numeral "2":

$$2 = \overline{\overline{E_1}} = \overline{\overline{\{e_0, e_1\}}} \tag{10}$$

Sucesivas adiciones de elementos e_2, e_3, ... definen una sucesión indefinida de conjuntos cuyos cardinales constituyen la sucesión indefinida de los cardinales finitos:

$$E_0 = \{e_0\};\ \overline{\overline{\{e_0\}}} = 1 \tag{11}$$

$$E_1 = \{E_0, e_1\} = \{e_0, e_1\};\ \overline{\overline{\{e_0, e_1\}}} = 2 \tag{12}$$

$$E_2 = \{E_1, , e_2\} = \{e_0, e_1, e_2\};\ \overline{\overline{\{e_0, e_1, e_2\}}} = 3 \tag{13}$$

$$\dots \tag{14}$$

Cada uno de estos cardinales, excepto el 1, resulta de sumar 1 al cardinal inmediatamente anterior en el orden de precedencia. Cantor prueba finalmente la mayor parte de las propiedades de estos cardinales finitos.

En el epígrafe 6, Cantor da por sentada la existencia del conjunto de todos los cardinales finitos como una totalidad completa (lo que equivale a asumir la existencia terminada de una lista interminable), al que asigna un número cardinal transfinito ([6], págs. 103-104):

> El primer ejemplo de un conjunto transfinito nos viene dado por la totalidad de los números cardinales finitos ν; llamamos a su número cardinal "Alef-cero" y lo representamos por el símbolo $\aleph_0$; así definimos

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}} \tag{15}$$

(donde $\{\nu\}$ es el conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$) Ahora prueba que $\aleph_0$ es diferente a todos los cardinales finitos, pues para cada uno de estos se verifica:

$$\nu \neq \nu + 1 \tag{16}$$

mientras que para $\aleph_0$:

$$\aleph_0 = \aleph_0 + 1 \tag{17}$$

Como es casi inevitable en estos casos, la prueba está basada en una biyección f entre el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$ y el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{a\}$ definida por:

$$f(1) = a \tag{18}$$

$$f(i+1) = i, \ \forall i \in N \tag{19}$$

Una vez asumida la existencia del conjunto de todos los cardinales finitos como una totalidad completa, conjunto al que se le asigna el primer cardinal transfinito $\aleph_0$, Cantor encuentra el camino hacia una sucesión infinita de cardinales transfinitos. Consideremos el conjunto $(\mathbb{N}|M)$ de todos los recubrimientos del conjunto $\mathbb{N} = \{1,$ $2, 3, \ldots\}$ de todos los cardinales finitos por el conjunto $M = \{1, 0\}$. Sus elementos serán cadenas infinitas de 1s y 0s con tantos términos como cardinales finitos. Es decir, si cada elemento del conjunto $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ es reemplazado por un 1 o un 0 tendremos una cadena binaria infinita, por ejemplo:

$$10101010\ldots; 111000111000\ldots; 0001111111\ldots \tag{20}$$

El conjunto formado por todas las sustituciones posibles de los elementos de $\{1,\ 2,\ 3,$ $\ldots\}$ por los de $\{1, 0\}$ es el conjunto infinito B de todas las cadenas binarias infinitas posibles:

$$11111111111\ldots \tag{21}$$

$$01011101101\ldots \tag{22}$$

$$11100000011\ldots \tag{23}$$

$$10000000000\ldots \tag{24}$$

$$11100011100\ldots \tag{25}$$

$$\ldots \tag{26}$$

De acuerdo con la definición de exponenciación de cardinales (véase (4) más arriba) tendremos:

$$(\overline{\overline{N|M}}) = \overline{\overline{B}} = 2^{\aleph_0} \tag{27}$$

puesto que el conjunto recubierto (el de los cardinales finitos) tienen $\aleph_0$ elementos mientras el conjunto recubriente tiene dos (el 0 y el 1). El método de la diagonal de Cantor [3] -cambiar el i-ésimo elemento de cada i-ésima columna de forma que si era 1 resulte 0 y viceversa- prueba que ese conjunto tiene más elementos que el conjunto de todos los cardinales finitos cuyo cardinal es $\aleph_0$. Así pues podemos escribir la ecuación fundamental:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} \tag{28}$$

Cada elemento C de $(\mathbb{N}|M)$ es una cadena infinita de 1s y 0s, que se puede interpretar de dos formas distintas:

1. C es la expresión binaria de un número real r tal que $0 \leq r \leq 1$. Es decir, la cadena de todos los decimales de un número real entre 0 y 1 expresados en el sistema binario de numeración.
2. C es un subconjunto S del conjunto de todos los cardinales finitos definido de la siguiente manera: para todo cardinal finito i: sea a_i el i-ésimo termino de la cadena C, entonces $i \in S$ si a_i =1; $i \notin S$ si $a_i = 0$. Por ejemplo, si C es la cadena 0100000 . . . (un 0, un 1, y el resto ceros) entonces C representa al subconjunto $S = \{2\}$ del conjunto de todos los cardinales finitos.

De la primera interpretación deducimos que el cardinal del conjunto $(\mathbb{N}|M)$ es el mismo que el del conjunto X de todos los números reales en el intervalo $[0, 1]$ expresados en el sistema binario. Aunque antes hay que resolver un pequeño problema: existe una infinidad numerable de elementos de X con dos expresiones binarias distintas, por ejemplo:

$$0,1000000\ldots = 0,0111111\ldots \tag{29}$$

$$0,0100000\ldots = 0,0011111\ldots \tag{30}$$

$$0,1100000\ldots = 0,1011111\ldots \tag{31}$$

Tienen dos expresiones binarias todos los números reales x del tipo:

$$x = \frac{2\nu + 1}{2^\mu} \tag{32}$$

Cantor llamó $\{s_\nu\}$ al conjunto numerable de los números reales que tienen una doble expresión binaria. En realidad hay una pequeña confusión en el texto de Cantor con respecto al conjunto $\{s_\nu\}$ [19]. No se trata del conjunto de todos los números reales de X que tienen una doble expresión binaria. El conjunto $\{s_\nu\}$ es el conjunto de las cadenas binarias que corresponden a las segundas expresiones binarias de los números reales del tipo (32), suponiendo que X se usen solo las primeras de esas expresiones. Para no crear confusiones innecesarias sea B el conjunto de todas las cadenas binarias infinitas de "0"s y "1"s (el recubrimiento de $\mathbb{N}$por $\{0,\ 1\}]$). Por definición tenemos

$$\overline{\overline{B}} = 2^{\aleph_0} \tag{33}$$

El conjunto B se puede dividir en dos conjuntos disjuntos: el conjunto B_X y el conjunto B_S. El conjunto B_X es el conjunto de todas las cadena binarias que representan a todos los número reales del conjunto $X = [0,\ 1]$ excepto las cadenas de las segundas expresiones binarias de todos aquellos elementos de X que tienen dos representaciones binarias (la primera terminada en una cadena infinita de "0"s y la segunda en una cadena infinita de "1"s). El conjunto B_S es precisamente el conjunto numerable de todas esas segundas cadenas binarias. Evidentemente tendremos:

$$B = B_X \cup B_S \tag{34}$$

y:

$$B_X \sim X \sim R \tag{35}$$

siendo B_X, X y R conjuntos no numerables. A partir de este punto podemos seguir a Cantor. Sea T un subconjunto numerable cualquiera de B_X y sea B'_X el complemento de T con respecto a B_X, i.e. $B'_X = B_X - T$, podemos escribir:

$$B_X = T \cup B'_X \tag{36}$$

siendo $T \cap B'_X = \emptyset$. Puesto que T es numerable sus elementos pueden ser indexados por la totalidad de los números naturales. Consecuentemente podemos considera dos subconjuntos numerables y disjuntos T_P y T_I, cuyos elementos están indexados respectivamente por los números pares y por los impares. La ecuación (36) se puede ahora escribir como:

$$B_X = T_P \cup T_I \cup B'_X \tag{37}$$

donde $T_P \cup T_I = T$; $T_P \cap T_I = \emptyset$. De (36) también obtenemos:

$$B_S \cup B_X = B_S \cup T \cup B'_X \tag{38}$$

y siendo:

$$T_E \sim B_S \qquad (T_E \text{ y } B_S \text{ son numerables}) \tag{39}$$

$$T_O \sim T \qquad (T_O \text{ and } T \text{ son numerables}) \tag{40}$$

$$B'_X \sim B'_X \qquad (\text{Todo conjunto es equivalente a sí mismo}) \tag{41}$$

$$\tag{42}$$

tenemos:

$$T_E \cup T_O \cup B'_X \sim B_S \cup T \cup B'_X \tag{43}$$

y entonces, de acuerdo con (37) y con (38):

$$B_X \sim B_S \cup B_X \tag{44}$$

y teniendo en cuenta que $B_S \cup B_X = B$, obtenemos:

$$B_X \sim B \tag{45}$$

y entonces

$$\overline{\overline{B}}_X = \overline{\overline{B}} = 2^{\aleph_0} \tag{46}$$

Finalmente, siendo $B_X \sim X \sim R$, podremos escribir

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{R}} = 2^{\aleph_0} \tag{47}$$

lo que prueba que la potencia del continuo es el cardinal transfinito $2^{\aleph_0}$. Es decir:

$$c = 2^{\aleph_0} > \aleph_0 \tag{48}$$

De acuerdo con la segunda interpretación dada más arriba al conjunto de todas las cadenas binarias de 1s y 0s, ese conjunto es el de todos los subconjuntos del conjunto $\mathbb{N}$de los números naturales, de modo que cada una de esas cadenas binaria representa a uno de tales subconjuntos. Se deduce entonces que el conjunto $P(\mathbb{N})$ de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$tiene una cardinalidad mayor que la de $\mathbb{N}$, que es $\aleph_0$. Simbólicamente:

$$\overline{\overline{P(\mathbb{N})}} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0 \tag{49}$$

La segunda interpretación de las cadenas de 1s y 0s abre la autopista de los Alefs hacia Omega, hacia Dios. Sólo necesitamos probar que todo conjunto tiene más subconjuntos que elementos. Veamos que así es. Sea A un conjunto cualquiera y $P(A)$ el conjunto de todos sus subconjuntos, incluyendo el conjunto vacío. Supongamos que A y $P(A)$ tienen los mismos elementos. Entonces existe una biyección f entre ambos conjuntos, de modo que para todo $x \in A$, existe un $B \in P(A)$ tal que

$$f(x) = B \tag{50}$$

y viceversa: para todo subconjunto C de A existe un elemento y en A tal que:

$$f^{-1}(C) = y \tag{51}$$

Ahora definimos un subconjunto S de A de la siguiente forma:

$$\forall x \in A : \, x \in S \Leftrightarrow f(x) \notin S_x \tag{52}$$

donde S_x es el subconjunto que la biyección f asocia al elemento x. Es decir, S es el conjunto de todos los elementos de A que no pertenece a su propia f-imagen, donde f es la supuesta biyección entre A y $P(A)$. El conjunto S es sin duda un subconjunto de A, aunque sea el conjunto vacío. Por tanto $f^{-1}(S)$ ha de tener su propia imagen en A. Sea esta imagen el elemento y. Tendremos:

$$f^{-1}(S) = y \tag{53}$$

y por tanto:

$$f(y) = S \tag{54}$$

De acuerdo con la notación anterior que denota como S_x al conjunto que f hace corresponder a un elemento cualquiera x, podremos escribir:

$$S = S_y \tag{55}$$

Es fácil ver ahora que y pertenece y no pertenece a S. Si no pertenece a S entonces no pertenece a su f-imagen que es precisamente S (55), pero si no pertenece a su f-imagen entonces, según la definición de S (conjunto de todos los elementos de A que no pertenecen a su f-imagen), ha de pertenecer a S, que es su f-imagen. Esto prueba que si y no pertenece a S entonces ha de pertenecer a S. Análogamente se prueba que si pertenece a S entonces no puede pertenecer a S. La contradicción es clara, y su consecuencia formal no puede ser otra que la falsedad de la hipótesis inicial acerca de que A y $P(A)$ tienen los mismos elementos. Queda entonces probado que para todo conjunto A se verifica:

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}} \tag{56}$$

Y como $P(A)$ es a su vez un conjunto tendrá subconjuntos, y existe el conjunto de todos sus subconjuntos $P(P(A))$. Y lo mismo ocurre con $P(P(A))$ y con $P(P(P(A)))$ etc. Podemos pues escribir:

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}} < \overline{\overline{P(P(A))}} < \overline{\overline{P(P(P(A)))}} < \dots \tag{57}$$

Para el caso del conjunto $\mathbb{N}$de todos los cardinales finitos tendremos:

$$\overline{\overline{\mathbb{N}}} < \overline{\overline{P(\mathbb{N})}} < \overline{\overline{P(P(\mathbb{N}))}} < \overline{\overline{P(P(P(\mathbb{N})))}} < \dots \tag{58}$$

Por otra parte los recubrimientos de $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$, $P(P(\mathbb{N}))$, $P(P(P(\mathbb{N})))$, $\ldots$ por $\{0, 1\}$ interpretados de acuerdo con la segunda alternativa, nos permiten escribir:

$$\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0 \tag{59}$$

$$\overline{\overline{P(\mathbb{N})}} = 2^{\aleph_0} \tag{60}$$

$$\overline{\overline{P(P(\mathbb{N}))}} = 2^{2^{\aleph_0}} \tag{61}$$

$$\overline{\overline{P(P(P(\mathbb{N})))}} = 2^{2^{2^{\aleph_0}}} \tag{62}$$

$$\ldots \tag{63}$$

Y de acuerdo con (58):

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \ldots \tag{64}$$

que representa una sucesión estrictamente creciente de infinitos.

En su estudio de los ordinales, Cantor encontró otro cardinal infinito mayor que $\aleph_0$: el cardinal $\aleph_1$ del conjunto de todos los ordinales correspondientes a un conjunto numerable (véase más abajo). Cantor probó que un conjunto de $\aleph_0$ elementos puede ordenarse de $\aleph_1$ formas distintas, siendo

$$\aleph_0 < \aleph_1 \tag{65}$$

En sus *Beiträge* Cantor promete probar la existencia de una sucesión infinita de Alefs:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \ldots \tag{66}$$

son los sagrados Alefs que conducen a Ω, el infinito absoluto, la madre de todos los infinitos ([18], in [22] pág. 119):

> [...] estas cardinalidades, los alefs, eran para Cantor algo sagrado, por así decir, los escalones que conducen al trono de la infinitud, al trono de Dios.

Pero en realidad Cantor no terminó de construir su prometida autopista hacia Dios. Asumió la (hipotética) existencia de la infinitud actual del conjunto de los ordinales finitos -a los que llamó ordinales de la primera clase- y sobre esa infinitud construyó la infinitud superior del conjunto de todos los ordinales de la segunda clase (ordinales transfinitos propios de los conjuntos numerables). El cardinal del conjunto de todos los ordinales de la primera clase es $\aleph_0$ y el del conjunto de todos los de la segunda $\aleph_1$. Nombró el primer ordinal de la tercera clase, pero no construyo nada más allá (véase más abajo).

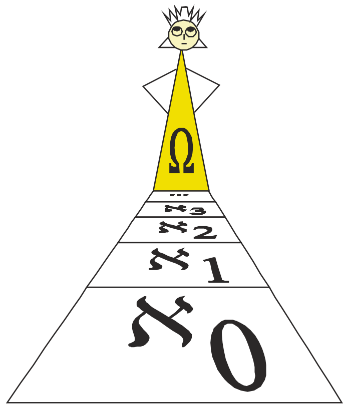

FIGURA 1. La autopista de los Alefs hacia Omega, la madre de todos los infinitos.

La aritmética de los números cardinales finitos incluye las operaciones elementales de suma, resta, multiplicación, división y exponenciación, que se practican de la forma habitual. La aritmética de los cardinales transfinitos es bien distinta. Se rige por las dos siguientes reglas:

1. Si a y b son cardinales, uno de ellos al menos infinito, tales que $b \geq a$, entonces:
$$a + b = b + a = a \times b = b \times a = b \tag{67}$$
2. Si a es un cardinal entonces $a < 2^a$.

La aritmética de cardinales transfinitos es algo monótona en sus resultados:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \tag{68}$$
$$1000 \times \aleph_0 = \aleph_0 \tag{69}$$
$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0 \tag{70}$$
$$\aleph_0^{8000000} = \aleph_0 \tag{71}$$
etc.

Además, esa aritmética no incluye operaciones como la resta o la división. Sin embargo sí definió Cantor la resta de ordinales transfinitos. Al parecer el enigma de la resta de cardinales transfinitos ha sido usado por algunos para probar la existencia de Dios (!) lo que provocó una cierta polémica al respecto ([23]). El infinito da realmente mucho juego.

Para terminar esta rápida incursión en el mundo de los cardinales transfinitos diremos que ya en el siglo XX los sucesores de Cantor incrementaron la familia de los cardinales con números que progresivamente se fueron haciendo casi inaccesibles, completamente inaccesibles y finalmente divinos (véase por ejemplo [20]). Estos son los habitantes cardinales del paraíso infinitista. Aunque, como veremos en el epígrafe siguiente, la existencia de dos sucesiones de cardinales transfinitos planteará un grave problema a Cantor y sucesores, aún no resuelto.

Cardinal	Ejemplos
$\aleph_0$	$\mathbb{N}$, Naturales $\mathbb{Z}$, Enteros $\mathbb{Q}$, Racionales Algebraicos ...
$\aleph_1$	ω_1, Ordinales contables
$c = 2^{\aleph_0}$	$\mathbb{R}$, Números reales $\mathbb{C}$, Números complejos $\mathbb{R}^3$, Espacio euclídeo P($\mathbb{N}$), Subconjuntos de $\mathbb{N}$ ...
$2^{2^{\aleph_0}}$	P($\mathbb{R}$), Subconjuntos de $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}$, funciones de $\mathbb{R}$en $\mathbb{R}$ ...

Cuadro 1. Algunos cardinales transfinitos.

4. La hipótesis del continuo

En la sección anterior hemos visto como Cantor llegó a establecer dos sucesiones distintas de números cardinales infinitos, ambas estrictamente crecientes. Si bien el primer término de ambas sucesiones es idéntico, $\aleph_0$, la posibilidad de que también fueran idénticos sus respectivos segundos miembros planteó un problema que Cantor ya no pudo resolver. Es el famoso problema del continuo. Lo de continuo viene porque $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales cuyo cardinal es $2^{\aleph_0}$, es un continuo topológico, densamente ordenado, sin huecos y de modo que entre cada dos números reales existe una infinidad no contable de números reales distintos (infinidades infinitamente encajadas unas dentro de otras). Siendo $c = \overline{\overline{R}}$ (el cardinal de R), la hipótesis del continuo puede expresarse de las siguientes maneras:

1. $c = \aleph_1$
2. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$
3. No existe ningún cardinal entre $\aleph_0$ y c.

Cantor dedicó la última parte de su vida a intentar resolver la hipótesis del continuo. Ni él ni ninguno de sus sucesores lo ha conseguido, de modo que sigue siendo el problema número uno de la famosa lista de 23 problemas de Hilbert. En el año 1908 F. Hausdorff ([21]) propuso la siguiente generalización de la hipótesis del continuo: las sucesiones (64) y (66) son idénticas término a término.

$$\forall \aleph_k : \ \aleph_k = \overline{\overline{P(P.\overset{k}{\ldots}.P(N).\overset{k}{\ldots}.)}} \tag{72}$$

O en otros términos:

$$\forall \aleph_k : \ 2^{\aleph_k} = \aleph_{k+1} \tag{73}$$

En el año 1904 se celebró en Heidelberg el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas. Por esa época Cantor era ya uno de los matemáticos más reconocidos del mundo. En ese congreso un médico y matemático de la Universidad de Budapest, Julius König (1849-1913), leyó un artículo en el que probaba que la potencia del continuo -el cardinal de los números reales- no era un alef y que el continuo no podría ser nunca un conjunto bien ordenado[2]. König logró probar que la suma s de una sucesión creciente de cardinales transfinitos verifica:

$$s^{\aleph_0} > s \tag{74}$$

Una de esas sumas es, por ejemplo:

$$\aleph_\beta + \aleph_{\beta+1} + \aleph_{\beta+2} + \cdots = \aleph_{\beta+\omega} \tag{75}$$

donde β es un ordinal de la segunda clase. Se verifica entonces:

$$\aleph_{\beta+\omega}^{\aleph_0} > \aleph_{\beta+\omega} \tag{76}$$

Por otra parte Bernstein había probado:

$$\aleph_\mu^{\aleph_\alpha} = \aleph_\mu \times 2^{\aleph_\alpha} \tag{77}$$

por lo que si la potencia del continuo $c = 2^{\aleph_0}$ fuese un alef, por ejemplo $\aleph_\beta$, podríamos sustituir en (77) $\aleph_\mu$ por $\aleph_{\beta+\omega}$ y $\aleph_\alpha$ por $\aleph_0$, y obtendríamos:

$$\aleph_{\beta+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\beta+\omega} \times 2^{\aleph_0} = \aleph_{\beta+\omega} \times \aleph_\beta = \aleph_{\beta+\omega} \tag{78}$$

[2] [16], [17].

lo que va en contra de (76). Naturalmente el artículo de König despertó un gran interés, se aplazaron las demás actividades del congreso para que todo el mundo pudiera asistir a su lectura. Hay versiones contradictorias sobre la reacción de Cantor, que según unos tomó la palabra para agradecer a Dios el haberle permitido conocer de esta forma sus errores, y según otros no tomó la palabra y se mostró seguro de que Dios nunca habría permitido revelar sus errores de esta forma.

Inmediatamente después Ernst Zermelo (1871-1953) demostró que König usaba el teorema de Bernstein en un caso en el que éste no era válido (al año siguiente Bernstein corrigió su teorema). Pero aún así, el ataque tuvo sus efectos y Cantor comprendió la necesidad de probar de una vez por todas que el cardinal de la potencia del continuo era uno de sus alefs. Nadie lo ha conseguido hasta ahora. Poco después del Congreso de Heidelberg, Zermelo creyó haber probado una de las convicciones de Cantor: que todos los conjuntos pueden ser "bien-ordenados", convertidos en conjuntos bien ordenados. Este resultado era necesario para demostrar otra de las convicciones de Cantor, que todo cardinal transfinito es un miembro de la lista de sus alefs. Pero, como es bien sabido, en su demostración Zermelo hacia uso de una nueva hipótesis: el discutido axioma de elección.

En el año 1938 Gödel logró probar que sería imposible deducir de los axiomas ZF (Zermelo Fraenkel) de la teoría de conjuntos la falsedad de la hipótesis del continuo [14], [15]. En 1936 Cohen probó el resultado complementario ([7], [8]): que la hipótesis del continuo no se puede deducir de los axiomas de la teoría de conjuntos. En consecuencia, la veracidad de la famosa hipótesis no tiene efectos formales sobre la teoría de conjuntos, es formalmente inocua. Así que no es posible esperar contradicciones en el seno de esa teoría por el hecho de incluir o no la hipótesis del continuo como nuevo axioma. Podría añadirse como un nuevo axioma, pero se piensa que es mejor no hacerlo porque no es autoevidente (!).

5. La paradoja de Cantor

En el año 1897 Cesare Burali-Forti (1861-1931), profesor de geometría en la Academia Militar de Turín, publicó la primera inconsistencia encontrada en el seno de la nueva teoría de conjuntos [2] (véase más adelante en este mismo apéndice). Pero seguramente fue el propio Cantor el primero en descubrir una inconsistencia conjuntista. Hay un cierto desacuerdo entre los historiadores de las matemáticas acerca de la cronología, el significado y la importancia que para el propio Cantor pudieron tener esos descubrimientos[3]. Como acabamos de ver, y el propio Cantor probó, el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado tiene más elementos que el conjunto en cuestión. Si M es un conjunto cualquiera se verifica:

$$\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{P(M)}} \tag{79}$$

Consideremos ahora el conjunto universal U, el conjunto de todos los conjuntos (que en tiempos de Cantor aún no había sido proscrito). Puesto que $P(U)$ es un conjunto, ha de ser un elemento de U, luego se ha de verificar también:

$$\overline{\overline{P(U)}} \leq \overline{\overline{U}} \tag{80}$$

lo que contradice (79). Esa es la paradoja de Cantor, probablemente encontrada en el año 1883 (otros sitúan el hallazgo en 1895, incluso en 1896) [13]. Como es bien sabido, el conjunto U fue expulsado del paraíso infinitista-conjuntista poco tiempo después de Cantor.

6. Ordinales. Aritmética de ordinales

De los 20 epígrafes de los *Beiträge*, los 6 primeros están dedicados a los cardinales y los 14 restantes a los tipos de orden y a los ordinales. Es un buen reflejo del estudio mucho más detallado y riguroso que Cantor dedicó a los ordinales. El concepto fundamental ahora es el de conjunto bien ordenado que, a su vez deriva de la noción de conjunto *simplemente ordenado* ([6], p. 110):

> Llamamos a un conjunto M "simplemente ordenado" si existe una regla que establece el orden de precedencia de sus elementos de forma que de dos cualesquiera de sus elementos, m_1 y m_2, uno de ellos toma el valor menor y otro el mayor, y de modo también que si de 3 elementos m_1, m_2 y m_3, fuese m_1 de menor que m_2, y m_2 de menor que m_3, entonces m_1 es menor que m_3.

Con esa base define Cantor el buen orden ([6], p. 137):

> Llamamos bien ordenado a un conjunto F simplemente ordenado si sus elementos ascienden en una sucesión definida desde un valor mínimo f_1 de modo que:
> 1. Existe en F un elemento mínimo f_1.
> 2. Si F' es una parte cualquiera de F y si F tiene uno o más elementos mayores que todos los elementos de F', entonces existe

[3] Véase por ejemplo [1], [13], [12].

> un elemento f' de F que sigue inmediatamente a todos los de F' sin que existan en F elementos entre f' y los elementos de F'.

Y finalmente la noción de número ordinal ([6], p. 151-152):

> ... todo conjunto simplemente ordenado M tiene un tipo definido de orden $\overline{M}$; este tipo es el concepto general que resulta de M si abstraemos la naturaleza de sus elementos reteniendo su orden de precedencia ... Todos los conjuntos que son similares entre sí[4], y solo ellos, tienen el mismo tipo de orden. Llamamos "número ordinal" al tipo de orden de un conjunto bien ordenado.

La noción de ω-orden había sido ya anticipada por Cantor ([6], p. 115):

> Por ω entendemos el tipo de orden de un conjunto bien ordenado
>
> $$(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots) \tag{81}$$
>
> en el que
>
> $$e_\nu \prec e_{\nu+1} \tag{82}$$
>
> y donde υ representa, a su vez, a todos los cardinales finitos.

Después de definir la noción de número ordinal, Cantor define las operaciones de suma, sustracción y multiplicación de ordinales. La suma de ordinales es asociativa:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \tag{83}$$

Aunque, en general, no es conmutativa (salvo que ambos ordinales sean finitos):

$$\alpha + \beta \neq \beta + \alpha \tag{84}$$

La multiplicación de ordinales tampoco es, en general, conmutativa aunque si asociativa y distributiva respecto de la suma:

$$\alpha \times \beta \neq \beta \times \alpha \tag{85}$$

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma) \tag{86}$$

$$\alpha \times (\beta + \gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma \tag{87}$$

[4] existe una biyección entre ellos que conserva el orden.

Otra propiedades aritméticas útiles son (siendo α y β infinitos y ν finito):

$$\alpha \times 1 = 1 \times \alpha = \alpha \tag{88}$$

$$\alpha - \nu = \alpha \tag{89}$$

$$\alpha + \nu \neq \alpha \tag{90}$$

$$\nu + \alpha = \alpha \tag{91}$$

$$\nu \times \alpha = \alpha \tag{92}$$

$$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta \tag{93}$$

$$(\alpha + \nu) \times \beta = \alpha \times \beta \tag{94}$$

En el epígrafe 14, Cantor define lo que él llama ”una sucesión fundamental de ordinales,” esto es, una sucesión estrictamente creciente e infinita de ordinales ([6], p. 156):

> Es importante hacer notar que es posible sumar un número infinito de ordinales de modo que su suma es un ordinal definido que depende de la sucesión de sumandos. Si
>
> $$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots \tag{95}$$
>
> es una sucesión simple e infinita de ordinales, y tenemos
>
> $$\beta_\nu = \overline{G_\nu}, \tag{96}$$
>
> entonces por el teorema E de §12[5]
>
> $$G = (G_1, G_2, \ldots, G_\nu, \ldots) \tag{97}$$
>
> es también un conjunto bien ordenado[6] cuyo número ordinal es la suma de los números β_ν. Tenemos, entonces
>
> $$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu + \cdots = \overline{G} = \beta \tag{98}$$
>
> [...] Si ponemos
>
> $$\alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu \tag{99}$$
>
> entonces
>
> $$\alpha_\nu = (\overline{G_1, G_2, \ldots G_\nu}) \tag{100}$$

[5]Si en un conjunto G se sustituyen sus elementos g por conjuntos bien ordenados de modo que si F_g y $F_{g'}$ son los conjuntos bien ordenados que ocupan los sitios de g y g' y $g \prec g'$ y también $F_g \prec F_{g'}$, entonces el conjunto H resultante es también bien ordenado

[6]En la notación de Cantor $G = (G_1, G_2, \ldots, G_\nu, \ldots)$ representa la unión de los conjuntos disjuntos $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_\nu \ldots$

> Tenemos
>
> $$\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu \tag{101}$$
>
> [...] La sucesión
>
> $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots \tag{102}$$
>
> representa así *cualquier* sucesión infinita de números ordinales que satisfacen la condición (101); la llamaremos "sucesión fundamental" de números ordinales.

Cantor consigue probar que esa sucesión fundamental (102) tiene un límite preciso: teorema §14 I ([6], p. 158):

> I. A toda sucesión fundamental de ordinales $\{\alpha_\nu\}$ pertenece un ordinal $\lim_\nu \alpha_\nu$ que sigue en orden de magnitud a todos los α_ν.

El límite de la sucesión es una noción fundamental en la construcción de los ordinales. Cantor ha probado ya que todos los conjuntos simplemente ordenados con un cardinal finito dado tienen el mismo ordinal finito. A los ordinales finitos los llama Cantor de la *primera clase*. Ahora prueba la existencia de ordinales infinitos, a los que llama de la *segunda clase*. En el epígrafe 15, y con la ayuda del límite de una sucesión de ordinales, se prueban 10 teoremas, el último de los cuales es un teorema fundamental en la construcción de los ordinales transfinitos, el teorema K:

> K. Todo ordinal α de la segunda clase, o bien se forma a partir del ordinal anterior α_{-1} por la adición de 1
>
> $$\alpha = \alpha_{-1} + 1 \tag{103}$$
>
> o bien existe una sucesión fundamental de ordinales $\{\alpha_\nu\}$ de la primera o de la segunda clase tal que:
>
> $$\alpha = \lim_\nu \alpha_\nu \tag{104}$$

Al final de la demostración de este teorema Cantor escribe:

> A estas dos formas en virtud de las cuales los ordinales mayores proceden de los más pequeños las llamaremos "primer y segundo principio de generación de los números ordinales de la segunda clase."

La aplicación sistemática del teorema K de Cantor da lugar a la inmensa familia de los ordinales de la segunda clase, el primero de los cuales es ω:

$$\begin{aligned}
&1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \\
&2\omega, 2\omega+1, 2\omega+2, \ldots 3\omega, 3\omega+1, 3\omega+2, \ldots \\
&4\omega, 5\omega, \ldots, \omega^2, \omega^2+1, \omega^2+2 \ldots \\
&\omega^3, \omega^4, \omega^5, \ldots, \omega^\omega, \ldots \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots
\end{aligned}$$

En el epígrafe 16 Cantor prueba otros dos teoremas importantes. El primero es el teorema D que establece que el cardinal del conjunto de todos los ordinales de la segunda clase no es igual a $\aleph_0$. El segundo el teorema F en el que se establece que el cardinal $\aleph_1$ del conjunto de todos los ordinales de la segunda clase es el siguiente cardinal infinito mayor que $\aleph_0$. Prueba también Cantor que todo ordinal α de la segunda clase se puede expresar de forma única como:

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\kappa_0 + \omega^{\alpha_1}\kappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\kappa_\tau \tag{105}$$

donde α_0, α_1, $\ldots \alpha_\tau$ son ordinales de la primera o de la segunda clase tales que:

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_\tau \tag{106}$$

mientras que κ_0, κ_1, $\ldots \kappa_\tau$ son ordinales de la primera clase -finitos- distintos de cero. La expresión (105) constituye la forma normal de los ordinales de la segunda clase. El grado α_0 de un ordinal α de la segunda clase nunca es mayor que α (teorema §18 F). Pero pude ser $\alpha_0 = \alpha$. En ese caso la expresión normal se reduce a un solo término:

$$\alpha = \omega^\alpha \tag{107}$$

Todos los ordinales ξ de la segunda clase que satisfacen la ecuación:

$$\xi = \omega^\xi \tag{108}$$

forman una clase especial llamada por Cantor ϵ-ordinales de la segunda clase. Estos ordinales no pueden ser alcanzados por ninguna combinación de operaciones aritméticas con ordinales menores. El menor de ellos, ϵ_0 viene dado por:

$$\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0} = \lim\,(\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots) \tag{109}$$

A lo largo del siglo XX se añadieron nuevos ordinales a la ya inmensa clase construida por Cantor[7]

[7] [9], [10], [24].

7. La paradoja de Burali-Forti

Los números ordinales dieron lugar a una conocida paradoja, la paradoja de Burali-Forti sobre el conjunto de todos los ordinales[8]. Se trata de una consecuencia inevitable de los tres siguientes enunciados:

1. Todo conjunto bien ordenado tiene un número ordinal único.
2. Todo conjunto ordenado que contenga a todos los predecesores de cada uno de sus elementos tiene un ordinal que es mayor que el ordinal de cualquier elemento del conjunto.
3. El conjunto O de todos los ordinales es un conjunto bien ordenado y contiene a todos los predecesores de cada uno de sus elementos.

De acuerdo con (3) y (1), el conjunto O tiene un ordinal, Ω, y por tanto Ω ha de pertenecer al conjunto de todos los ordinales O. Pero de acuerdo con (2) el ordinal Ω de O ha de ser mayor que el ordinal de cada uno de sus elementos, entre los que se encuentra el propio Ω. De este modo Ω es más grande que Ω. Lo cual es una contradicción.

Pero en estos primeros tiempos de la teoría de conjuntos (la llamada teoría ingenua de conjuntos), Cantor parece que no estaba muy preocupado por este tipo de problemas. Simplemente declaró al conjunto O como una totalidad inconsistente (Carta a Dedekind de 1899 citada en [22], pág. 129):

> Una multiplicidad puede ser de tal naturaleza, que la suposición de que todos sus elementos estén conjuntados conduce a una contradicción, de modo que es imposible concebir dicha multiplicidad como una unidad, como una cosa terminada. A tales multiplicidades las llamo multiplicidades absolutamente infinitas o inconsistentes. [...] Cuando, por el contrario, la totalidad de los elementos de una multiplicidad pueden ser pensados como conjuntados sin contradicción, de tal modo que pueden ser pensados como reunidos en *una* cosa, la llamo multiplicidad consistente o conjunto.

Sin embargo, unos pocos años después fue necesario introducir ad hoc la noción de *clase propia* para evitar este tipo de paradojas.

---

[8] [2], [11], [13].

Referencias

1. R. Bunn, *Los desarrollos en la fundamentación de la matemática desde 1870 a 1910*, Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica (I. Grattan-Guinness, ed.), Alianza, Madrid, 1984, pp. 283–327.
2. Cesare Burali-Forti, *Una questiones sui numeri transfiniti*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **11** (1897), 154–164.
3. Georg Cantor, *Über Eine elementare frage der mannigfaltigkeitslehre*, Jahresberich der Deutschen Mathematiker Vereiningung, vol. 1, 1891.
4. ———, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen **XLVI** (1895), 481 – 512.
5. ———, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematishe Annalen **XLIX** (1897), 207 – 246.
6. ———, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, Dover, New York, 1955.
7. Paul J. Cohen, *The independence of the Continuum Hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences **50** (1963), 1143 – 1148.
8. ———, *The independence of the Continuum Hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences **51** (1964), 105 – 110.
9. J. H. Conway, *On Numbers and Games*, Academic Press, London, 1976.
10. J. H. Conway and R. K. Guy, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, New York, 1996.
11. I. M. Copi, *The Burali Forti Paradox*, Philosophy of Science **25** (1958), 281 – 286.
12. Josep W. Dauben, *Georg Cantor. His mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1990.
13. Alejandro R. Garciadiego Dantan, *Bertrand Rusell y los orígenes de las paradojas de la teoría de conjuntos*, Alianza, Madrid, 1992.
14. Kurt Gödel, *The consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences **24** (1938), 556 – 557.
15. ———, *The consistency of the Continuum Hypothesis*, Princeton University Press, Princeton NJ, 1940.
16. Julius König, *Zum Kontinuum Problem*, Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresse in Heidelberg (Leipzig), A. Krazer, 1904, pp. 144–147.
17. Julius Konig, *Zum Kontinuum Problem*, Matematishe Annalen **60** (1905), 177–180.
18. G. Kowalewski, *Bestand und wandel. zugleich ein beitrag zur neuren geschichte der mathematik*, Verl. R. Oldenbourg, Munchen, 1950.
19. Antonio León, *Correcting a minor error in Cantor's calculation of the power of the continuum*, http://arxiv.org/abs/math/0609589, September 2006.
20. Nancy McGough, *Cardinal Numbers*, Infinite Ink (http://www.ii.com), 1997.
21. ———, *The Continuum Hypothesis*, Infinite Ink (http://www.ii.com), 1998.
22. Jesús Mosterín, *Los lógicos*, Espasa Calpe, Madrid, 2000.
23. Graham Oppy, *Inverse Operations with Transfinite Numbers and the Kalam Cosmological Argument*, International Philosophical Quarterly **35, 2** (1995), 219 – 221.

24. Rudy Rucker, *Infinity and the Mind*, Princeton University Press, Princeton, 1995.